

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS  
M A D R I D

- TESIS DOCTORAL -

EFECTO DE EXTREMO EN LA RESPUESTA DE UNA SONDA CI-  
LINDRICA DE LANGMUIR

por Juan Ramón Sanmartín Losada

Ingeniero Aeronáutico (1965)

Licenciado en Ciencias Físicas  
Universidad de Madrid (1965)

Doctor of Philosophy (Aerospace  
Engineering Sciences), Univer-  
sity of Colorado, EE.UU. (1967)

Catedrático Director de Tesis:

D. Amable Liñán Martínez

## RESUMEN

Tanto en plasmas de laboratorio como en la ionosfera, se ha observado recientemente un fenómeno nuevo en la respuesta de una sonda cilíndrica de Langmuir que se mueve en un plasma rarificado. Bajo condiciones tales que: a) el potencial de la sonda respecto al plasma sea muy negativo; b) su velocidad sea mucho mayor que la velocidad de las ondas iono-acústicas del plasma; y c) la longitud de Debye sea grande comparada con el radio de la sonda pero pequeña con respecto a su longitud, la corriente eléctrica registrada por aquella muestra un máximo muy agudo cuando el ángulo entre la dirección del movimiento y el eje de la sonda pasa por cero.

En la presente tesis se desarrolla una teoría de este fenómeno, la cual conduce a una expresión analítica para la corriente eléctrica recogida por la sonda; se obtienen fórmulas sencillas para la altura y semianchura del máximo de la corriente y resultados gráficos universales para la estructura de dicho máximo. La teoría está en muy buen acuerdo con los datos experimentales existentes. Se muestra cómo puede hacerse uso del efecto en la corriente para medir las variables de estado en los plasmas, y en particular para la medida de la temperatura iónica.

I N D I C E

- LISTA DE SIMBOLOS.
- I - INTRODUCCION.
- II - PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL EFECTO DE EXTREMO.
- III - SIMILARIDAD CON UN PROBLEMA NO ESTACIONARIO.
- IV - EXTENSION DEL ANALISIS AL PROBLEMA DEL EFECTO DE EXTREMO.
- V - RESULTADOS ANALITICOS Y GRAFICOS, Y DISCUSION.
- VI - COMPARACION CON RESULTADOS EXPERIMENTALES.
- VII - CONCLUSIONES.
- BIBLIOGRAFIA.

Apéndice A : DETERMINACION APROXIMADA DEL CAMPO POTENCIAL EN EL PROBLEMA SIMILAR NO ESTACIONARIO.

Apéndice B : VALIDEZ DE LA SIMILARIDAD DE HESTER Y SONIN.

Apéndice C : DESARROLLO MATEMATICO PARA EL PROBLEMA SIMILAR NO ESTACIONARIO.

Apéndice D : EL ANALISIS DE BETTINGER Y CHEN PARA  $l > l_m$ .

—=00000=—

LISTA DE SIMBOLOS USADOS EN EL TEXTO PRINCIPAL

$A^{\pm}(v_1^{\pm})$ .....	Región del plano $(\rho, \varphi)$ en la fig. 6; véase Sec. III.
$a^{\pm}(t, v_1^{\pm}), a^{\pm}(z, v_1^{\pm})$	Area de la parte de $A^{\pm}$ capturada por la sonda antes del instante $t$ (o la distancia $z$ ), (Sec. III).
$a(t), a(z)$ .....	$= \int a^{\pm} f_0(\vec{v}_1^{\pm}) d\vec{v}_1^{\pm}$ ; valor medio de $a^{\pm}$ .
$\hat{a}^{\pm}$ .....	$= a^{\pm}/r_s^2$ ; forma adimensional de $a^{\pm}$ .
$\hat{a}$ .....	$= a/r_s^2$ ; forma adimensional de $a$ .
$B^{\pm}(v_1^{\pm})$ .....	Complemento de $A^{\pm}$ en el plano $(\rho, \varphi)$ de la fig. 6.
$-e$ .....	Carga eléctrica del electrón.
$F_1, F_2$ .....	Funciones definidas en las Ecs. (78) y (79).
$f_0(\vec{v}_1)$ .....	Función de distribución (densidad en el espacio posición-velocidad) de los iones en el plano $(\rho, \varphi)$ .
$G$ .....	Función definida en la Ec. (24).
$h$ .....	$= \ln \sigma^2 / (\sigma^2 - 1)$ ; véase la Ec. (56).
$I_0$ .....	Función de Bessel modificada de orden <u>ce</u> ro.
$I_s$ .....	Corriente eléctrica a la sonda.
$I_{s\infty}$ .....	Corriente eléctrica a la sonda cuando su longitud tiende a infinito.
$I_{\max}$ .....	Para $V_s$ fijo, valor máximo de $I_s$ como <u>fun</u> ción de $\theta$ ; $I_{\max} = I_s(\theta = 0)$ .

$j^{\pm}(t, v_{\perp}^{\pm}), j^{\pm}(z, v_{\perp}^{\pm})$	Densidad de corriente en la superficie de la sonda para la función de distribución de la fig. 6.
$j(t), j(z)$ .....	$= \int j^{\pm} f_0(\vec{v}_{\perp}^{\pm}) d\vec{v}_{\perp}^{\pm}$ ; valor medio de $j^{\pm}$ .
$\bar{j}^{\pm}$ .....	$= l^{-1} \int_0^l j^{\pm}(z) dz$ ; valor medio de $j^{\pm}$ sobre la longitud de la sonda.
$\bar{j}$ .....	$= l^{-1} \int_0^l j(z) dz$ ; valor medio de $j$ sobre la longitud de la sonda.
$j_{\infty}$ .....	Valor límite de $\bar{j}$ cuando $l \rightarrow \infty$ .
$\bar{j}/j_{\infty} _{\max}$ .....	Valor de $\bar{j}/j_{\infty}$ para $\theta = 0$ .
$K_B$ .....	Constante de Boltzmann.
$l$ .....	Longitud de la sonda.
$l_m$ .....	$\approx 3M\lambda_D$ ; la presente teoría es válida para $l \lesssim l_m$ .
$\hat{l}$ .....	$= l/\lambda_D$ ; longitud adimensional de la sonda.
$M$ .....	$= U/\lambda_D \omega_{pi}$ ; número de Mach basado en la velocidad de las ondas ionoacústicas.
$m_i$ .....	Masa de un ión.
$m_e$ .....	Masa de un electrón.
$N_0$ .....	Densidad del plasma lejos de la sonda.
$N_e, N_i$ .....	Densidades de electrones e iones.
$q$ .....	Punto característico en el plano $(\rho, \varphi)$ de la fig. 6; véase la Sec. III.
$r$ .....	Distancia al eje de la sonda.
$r_s$ .....	Radio de la sonda.
$s$ .....	$= 2(1-\sigma^{-2})/\ln \sigma^2$ ; véase la Ec. (61).
$T_e, T_i$ .....	Temperaturas de electrones e iones.

$t$ .....	Tiempo en el problema no estacionario.
$t_l$ .....	$= l/U$ ; tiempo equivalente a la longitud de la sonda en el problema no estacionario.
$t_m$ .....	$= l_m/U$ .
$-\vec{U}$ .....	Velocidad de la sonda relativa al plasma.
$V$ .....	Campo potencial alrededor de la sonda.
$V_s$ .....	Potencial eléctrico de la sonda relativo al potencial del plasma.
$\vec{v}_1, \vec{v}_1^*$ .....	Vector velocidad de los iones en el plano $(\vartheta, \varphi)$ .
$X, X_0, X_1, X_0^{\mu\gamma}, X_1^{\mu\gamma}$ ..	Funciones definidas en la Sec. V.
$Y(\varepsilon, \psi_s)$ .....	Función definida en la Ec. (17); véase la figura 5.
$Z_i$ .....	Número de carga de los iones.
$z$ .....	Distancia a lo largo del eje de la sonda.
$\alpha^*$ .....	$= 2\beta^*/\psi_s \bar{\delta}$ ; véase la Ec. (25).
$\alpha_T$ .....	$= 2(\beta + M^2 \theta^2/2)/\psi_s \bar{\delta}$ ; véase la Ec. (38).
$\beta$ .....	$= T_i/Z_i T_e$ ; razón de temperaturas.
$\beta^*$ .....	$= m_i (\vec{v}_1^*)^2 / 2 Z_i K_B T_e$ ; véase la Ec. (25).
$\beta_T$ .....	$= \beta + M^2 \theta^2/2$ ; véase la Ec. (37).
$\beta_{cr}^*$ .....	Valor crítico de $\beta^*$ definido al final de la Sec. III.
$\vartheta$ .....	Variable angular de integración en la Ec. (58).
$\delta(t), \delta(z)$ .....	Función definida en la Ec. (15).
$\bar{\delta}$ .....	Valor medio aproximado de $\delta$ ; véase la Ec. (17).

$\varepsilon$ .....	$= r_s/\lambda_D$ ; radio adimensional de la sonda.
$z$ .....	$= z/l$ ; distancia adimensional a lo largo de la sonda.
$\eta$ .....	Función definida en la Ec. (59).
$\theta$ .....	Angulo entre $\vec{U}$ y el eje de la sonda.
$\hat{\theta}_{1/2}$ .....	Semianchura del máximo de la corriente (Sec. V).
$\theta_{1/2}$ .....	Semianchura del máximo, según se define en la Ref. [37].
$[\theta_{1/2}]_{BC}$ .....	Valor de $\theta_{1/2}$ según la Ref. [36].
$\lambda_D$ .....	Longitud de Debye; véase la Sec. II.
$\mu$ .....	Forma adimensional de $\theta$ ; véase la Ec. (59).
$\hat{\mu}_{1/2}$ .....	Forma adimensional de $\hat{\theta}_{1/2}$ ; véase la Ec. (72).
$\nu$ .....	$= (Z_i N_i - N_e)/N_0$ ; densidad adimensional de carga.
$\langle \nu \rangle$ .....	Valor medio de $\nu$ , según se define en la Ec. (16).
$\bar{\nu}$ .....	Valor medio aproximado de $\langle \nu \rangle$ ( $\bar{\nu} \approx 0.80$ ); Sec. III.
$\rho$ .....	$= r/r_s$ ; distancia (adimensional) al eje de la sonda.
$\rho_0$ .....	Valor inicial de $\rho$ para un ión.
$\rho_m$ .....	$= (2\psi_s \bar{\delta})^{1/2}/\varepsilon$ ; el presente análisis sólo considera iones con $\rho_0 \leq \rho_m$ .
$\rho_q$ .....	Distancia radial al punto $q$ en la fig. 6; véase la Sec. III.
$\bar{\rho}_A(\varphi)$ .....	Límite de la región $A^*$ en la fig. 6; véase la Sec. III.

$\bar{\rho}_A(\varphi)$ .....	Límite de la región $A^*$ en la fig. 6; véase la Sec. III.
$\sigma$ .....	Variable definida por la Ec. (55).
$\tau$ .....	$= t\omega_{pi}$ ; tiempo adimensional.
$\tau_0(\rho_0, \varphi_0)$ .....	Tiempo de viaje a la sonda de un ión con coordenadas iniciales $(\rho_0, \varphi_0)$ .
$\tau_m$ .....	$= \omega_{pi} t_m$ .
$\tau_q$ .....	$= \tau_0(\rho_0 = \rho_q, \varphi_0 = \pi/2)$ ; véase Sec. III.
$\tau_1$ .....	$= \omega_{pi} t_1$ .
$\varphi$ .....	Coordenada azimutal en torno al eje de la sonda.
$\varphi_0$ .....	Valor inicial de $\varphi$ para un ión.
$\psi$ .....	$= -eV/K_B T_e$ ; campo potencial adimensional.
$\psi_s$ .....	$= -eV_s/K_B T_e$ ; potencial adimensional de la sonda.
$\bar{\psi}_s$ .....	Cierto valor medio de $\psi$ definido en la Ec. (49).
$\omega_{pi}$ .....	Frecuencia iónica del plasma; véase la Sec. II.

—=oOo=—



## I.- INTRODUCCION.

Una sonda electrostática o de Langmuir [1]<sup>\*</sup> es un instrumento de medida, muy sencillo, utilizado en el estudio de los gases ionizados o plasmas, y que consiste en un pequeño electrodo situado en el plasma en el lugar de interés y conectado a un circuito exterior que permite regular su potencial eléctrico (fig. 1). Generalmente la superficie de la sonda tiene una temperatura muy inferior a la del plasma así - que casi todos los electrones que la alcanzan son absorbidos y casi todos los iones que la alcanzan se recombinan con electrones de la superficie, a la cual abandonan como átomos neutros. La sonda, por tanto, absorbe cargas eléctricas, pero no absorbe masa. El diagrama corriente-voltaje (C-V), que es una representación de la corriente eléctrica que fluye del plasma a la sonda en función del potencial de ésta, puede suministrar importante información acerca de las propiedades locales del gas ionizado (fig. 2).

A causa de su extremada sencillez experimental, la sonda de Langmuir es una de las técnicas más frecuentemente empleadas en la "diagnos<sup>is</sup>", o determinación de las variables de estado de los plasmas [2]. Las sondas, inicialmente introducidas para plasmas de laboratorio, son ahora utilizadas a menudo en la exploración del espacio. Para facilitar la obtención de las propiedades del plasma a partir de la información contenida en los diagramas C-V observados experimentalmente

---

\* Los números entre los signos [ ] se refieren a la bibliografía al final de esta tesis.

Fig.1 Esquema básico de la sonda de Langmuir.

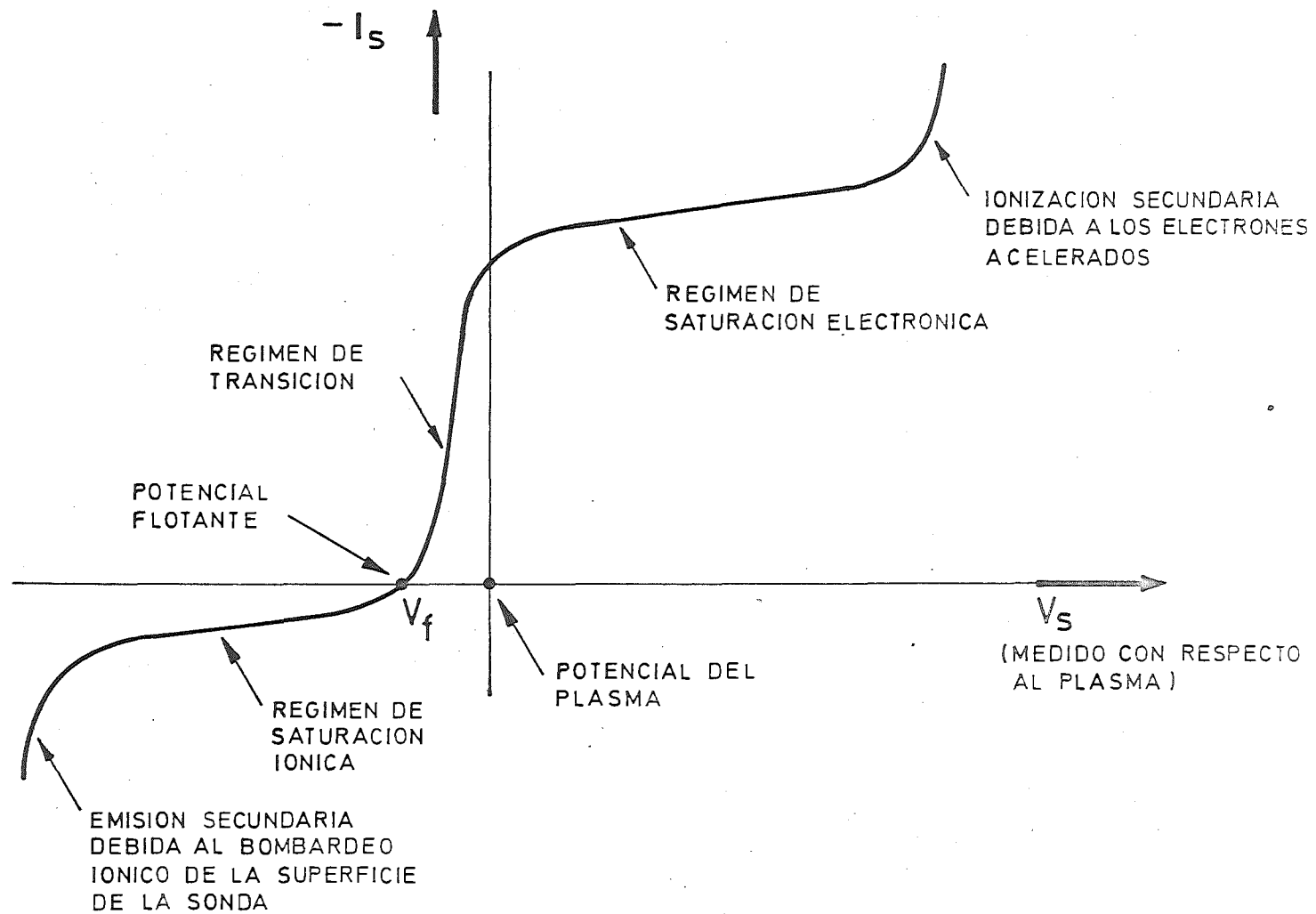
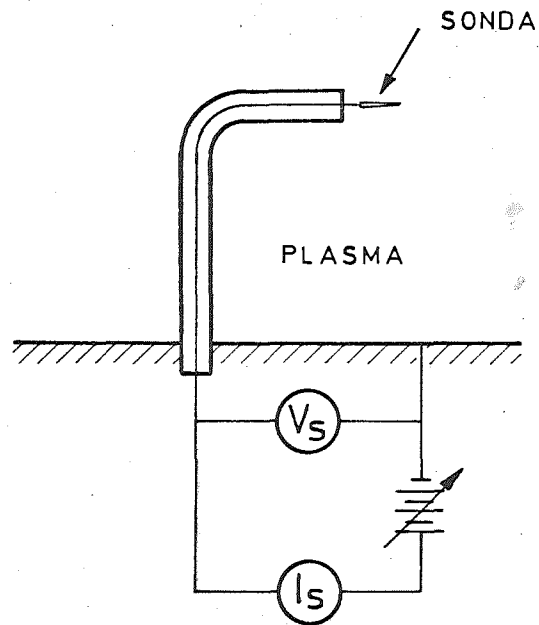


Fig.2 Diagrama C - V de una sonda de Langmuir para  $\lambda \gg r_s$ ,  $\lambda \gg \lambda_D$  y  $B_0 = 0$ . (Corriente iónica exagerada).

se emplean comúnmente formas de sonda de alto grado de simetría: una esfera o un largo cilindro para plasmas en reposo, o un largo cilindro para plasmas en movimiento según el eje del cilindro. Desgraciadamente la teoría requerida para la interpretación de los datos experimentales es difícil incluso para tales formas sencillas.

Cuando una sonda se encuentra a un potencial eléctrico,  $V_s$  (medido con respecto al potencial local del plasma), atrae partículas con carga de signo opuesto a  $V_s$  y rechaza las de signo igual. Si  $|V_s|$  es suficientemente grande, muy pocas partículas rechazadas alcanzan la sonda, y se establece una capa (capa de Debye) adyacente a ésta que sólo contiene partículas atraídas. La densidad de carga espacial neta establecida en esa región, de signo opuesto a la carga en la sonda, limita la penetración del campo eléctrico en el plasma; más allá de esa capa de Debye las densidades de carga de las partículas atraídas y rechazadas se hacen aproximadamente iguales (cuasineutralidad del plasma) [3]. El apantallamiento de los campos eléctricos es una de las características fundamentales de los plasmas; el espesor de la capa de Debye, o distancia de apantallamiento, es del orden de una longitud fundamental en los plasmas, la longitud de Debye,  $\lambda_D$  [4]. La existencia de esa capa límite es la causa fundamental de la dificultad de la teoría de sondas.

La conjunción de sencillez experimental y complejidad teórica ha resultado en una copiosa literatura sobre la teoría de la medición por medio de sondas, esto es, sobre el problema de extraer información acerca de un plasma a partir

de un diagrama C-V obtenido experimentalmente. Los análisis existentes consideran naturalmente el problema inverso: supuestas conocidas las propiedades del plasma (así como las características de la sonda) determinar cuantitativamente el diagrama C-V.

Los análisis sobre este problema se suelen clasificar mediante una ordenación de las longitudes características que se presentan en él. Usualmente éstas son:

- 1) La longitud de Debye,  $\lambda_D$ .
- 2) Una longitud característica de la sonda (en caso de una esfera o un cilindro, el radio  $r_s$ ).
- 3) En la presencia de un campo magnético aplicado,  $\vec{B}_0$ , el radio de Larmor de los electrones (basado en una velocidad característica de éstos),  $l_e$ .
- 4) El correspondiente radio de Larmor de los iones  $l_i$ .
- 5) Un camino (o caminos) libre medio para las partículas cargadas,  $\lambda$ .

De acuerdo con lo dicho anteriormente sobre el apantallamiento de Debye, las longitudes realmente fundamentales en el problema son  $\lambda_D$  y  $r_s$ ;  $l_e$ ,  $l_i$  y  $\lambda$  sólo intervienen si son menores o del mismo orden que  $\lambda_D$  ó  $r_s$ ; en caso contrario desaparecen del problema. Por otra parte se supone que las longitudes macroscópicas características del plasma, como son su dimensión lineal o la escala de su inhomogeneidad, no intervienen en el problema:  $\lambda_D$  es usualmente muy pequeño comparado con tales longitudes, y por otra parte se pueden obte

ner sondas con  $r_s$  del orden de  $10^{-3}$  cm. (Desde luego las sondas carecerán de utilidad para casos en que las longitudes macroscópicas intervengan en el problema, pues no se podrán obtener medidas locales). De todo esto se sigue que en los análisis teóricos el plasma se supone homogéneo en ausencia de la sonda.

La situación que presenta mayor interés y que más atención ha merecido corresponde al límite "rarificado" o "sin colisiones" en el cual  $\lambda \gg \lambda_D$ ,  $\lambda \gg r_s$ . El límite opuesto ("continuo"), en el que  $\lambda \ll \lambda_D$ ,  $\lambda \ll r_s$ , ha sido analizado (suponiendo  $B_0 \rightarrow 0$ , esto es,  $l_e, l_i \rightarrow \infty$ ), entre otros por Su y Lam [5], Cohen [6] y Toba y Sayano [7] para plasmas en reposo relativo a la sonda, y por Chung [8], Su [9] y Lam [10] para plasmas en movimiento; la condición  $\lambda \ll \lambda_D$  solo puede ser satisfecha en plasmas débilmente ionizados, y aún en estos se presenta raramente, lo que explica la (relativamente) escasa literatura sobre el tema. El caso intermedio en que  $\lambda$  es comparable a  $\lambda_D$  ó a  $r_s$ , es importante pero ofrece grandes dificultades analíticas; no obstante se han obtenido recientemente algunos resultados satisfactorios [11] - [14].

En los trabajos pioneros de Langmuir [3], y en la mayor parte de la subsiguiente copiosa literatura sobre el límite "rarificado" se supone que  $B_0 = 0$ ; si  $B_0 \neq 0$  el análisis se complica extraordinariamente [15] - [22]. Debe subrayarse sin embargo que la hipótesis  $B_0 = 0$  no es excesivamente restrictiva. Para entender esto conviene discutir brevemente las características cualitativas del diagrama C-V en el límite "rarificado" para  $B_0 = 0$  (fig. 2):

(a) Potencial del plasma: Cuando  $V_s = 0$  la sonda no perturba eléctricamente el plasma, y la corriente,  $I_s$ , que recoge aquella se debe tan sólo al movimiento térmico de las partículas. La velocidad térmica de los iones es mucho menor que la de los electrones, por lo que la corriente  $I_s$  es predominantemente electrónica.

(b) Régimen de saturación electrónica: Si  $V_s > 0$  la sonda atrae electrones y rechaza iones; es evidente que tan sólo el primer fenómeno tiene un efecto apreciable sobre  $I_s$ . La variación de  $I_s$  con  $V_s$ , para  $V_s$  positivo, depende de la forma de la sonda y del valor de  $r_s/\lambda_D$ ; para muchos casos de interés  $I_s$  se satura aproximadamente, esto es,  $dI_s/dV_s$  se hace muy pequeño. Normalmente no se usan valores muy grandes de  $V_s$ , pues en caso contrario los electrones acelerados por la sonda producen una ionización secundaria en el plasma.

(c) Régimen de transición: Para  $V_s < 0$  la sonda rechaza electrones y acelera iones. De nuevo el primer efecto es el importante. La corriente electrónica y, por tanto,  $I_s$ , decrece rápidamente. Si la función de distribución de los electrones es Maxwelliana,  $I_s$  varía exponencialmente con  $V_s$ ; en otro caso la forma de  $I_s(V_s)$  puede suministrar información sobre dicha función de distribución.

(d) Potencial flotante: Para  $V_s$  decreciente se alcanza un valor,  $V_f$ , tal que la corriente electrónica es ya tan reducida que iguala a la iónica, esto es,  $I_s = 0$ . Una sonda aislada eléctricamente adquirirá ese potencial al que, por tanto, se le llama flotante.

(e) Régimen de saturación iónica: Para  $V_s < V_f$  la co

corriente iónica predomina sobre la electrónica; de nuevo se puede presentar una cuasi-saturación de  $I_s$ , dependiendo de la forma de la sonda y del valor de  $r_s/\lambda_D$ . No se usan valores (negativos) muy grandes de  $V_s$ , pues en caso contrario el bombardeo iónico produce una emisión secundaria en la sonda.

En muchos casos de interés el plasma se encuentra en la presencia de un campo magnético aplicado,  $\vec{B}_0$ ; sin embargo,  $B_0$  es raramente tan intenso que  $l_i$  sea del mismo orden o menor que  $\lambda_D$  ó  $r_s$ . De esto se sigue que usualmente se puede despreciar el efecto del campo magnético sobre el movimiento de los iones. Por otra parte si  $V_s$  es negativo y no muy próximo a cero, la sonda absorbe pocos electrones, por lo que éstos se encuentran en equilibrio en el campo potencial de aquella, independientemente de que  $B_0$  sea o no sea igual a cero. Como consecuencia, para una gran mayoría de los casos, se puede suponer que  $B_0 = 0$  en el estudio de los regímenes c), d) y e) indicados anteriormente. Frecuentemente estos regímenes son de hecho los únicos que se pueden emplear experimentalmente debido a que para  $V_s > 0$  la corriente electrónica se hace tan grande que tiene una influencia no local sobre el plasma.

En sus estudios sobre el límite "rarificado", Langmuir [3] trató satisfactoriamente dos casos extremos:  $r_s/\lambda_D \ll 1$  y  $r_s/\lambda_D \gg 1$ .\*

---

\* Se demuestra fácilmente que la componente de  $I_s$  debida a la especie rechazada se calcula sin dificultad [2], por lo que el análisis siempre se reduce al cálculo de la corriente de partículas atraídas.

Para  $r_s \ll \lambda_D$ , el campo potencial decrece lentamente con la distancia a la sonda, debido a que el espesor de la capa de Debye, medido en radios  $r_s$ , es muy grande; es fácil demostrar que en este caso se puede calcular  $I_s$ , para sondas cilíndricas o esféricas, sin determinar la forma del campo potencial [2]. Para  $r_s/\lambda_D$  creciente, el espesor relativo de la capa de Debye disminuye y el campo potencial se hace más abrupto, esto es, decrece más rápidamente con la distancia; en este caso se puede demostrar que para determinar  $I_s$  es necesario conocer el campo potencial [2]. No obstante, si  $r_s/\lambda_D$  se hace suficientemente grande se puede, de nuevo, evitar el estudio del campo potencial en el cálculo de  $I_s$ . En efecto, como la capa de Debye es entonces muy delgada y el campo potencial no penetra más allá de esa capa, la componente de  $I_s$  debida a la especie atraída es aproximadamente independiente de  $V_s$ , y es por tanto igual a su valor para  $V_s = 0$  [2].

Posterior análisis han mostrado que el caso  $r_s/\lambda_D \gg 1$  no es tan sencillo como se acaba de describir. Por otra parte,  $r_s/\lambda_D$  es frecuentemente de orden unidad o moderadamente pequeño (o grande). A causa de todo esto se ha desarrollado una extensa literatura sobre el problema general del límite "rarificado", el cual en la actualidad puede considerarse resuelto [23]-[30]; existen resultados numéricos completos para esferas y cilindros con  $r_s/\lambda_D$  arbitrario y  $B_0 = 0$  [30].

Conviene indicar brevemente la causa del fracaso del análisis de Langmuir para  $r_s/\lambda_D \gg 1$ . Bohm [15] demostró que de hecho, el campo potencial penetra más allá de la capa



de Debye, en la región donde el plasma es cuasineutro. Este efecto solamente es despreciable en el caso de que la especie atraída esté a mayor temperatura que la rechazada. Como se ha indicado anteriormente, en muchas situaciones sólo se puede emplear el intervalo  $V_s < 0$ , en el cual los iones son las partículas atraídas; dado que los iones raramente se encuentran más calientes que los electrones, se sigue que frecuentemente el análisis de Langmuir carece de utilidad práctica.

Conviene señalar que el campo potencial que penetra más allá de la capa de Debye acelera las partículas atraídas en tal grado que éstas llegan a dicha capa con una energía cinética que corresponde a la temperatura de la especie rechazada; este es el llamado criterio de Bohm [15] que tiene una gran importancia: en el caso  $V_s < 0$  y  $T_i < T_e$  (siendo  $T_i$  y  $T_e$  las temperaturas de iones y electrones respectivamente), los iones penetran en la capa de Debye con una velocidad media determinada por  $T_e$  y no por  $T_i$ . Así pues  $I_s$ , en el régimen de saturación iónica, depende de  $T_e$  y no de  $T_i$ . A causa de esto se admite comúnmente que las sondas no pueden medir la temperatura iónica. (Para  $r_s/\lambda_D \ll 1$  es fácil demostrar que  $I_s$  es prácticamente independiente de  $T_i$  en todo el intervalo de variación de  $V_s$ ).

La discusión anterior sobre el límite rarificado se refiere exclusivamente al caso en que no existe un movimiento relativo entre sonda y plasma; el análisis se complica extraordinariamente en caso contrario [31] - [33]. Un problema en el que no se presenta tal complicación es el de una sonda cilíndrica, infinitamente larga, que se mueve con una ve-

locidad  $U$  respecto al plasma, y tal que  $r_s/\lambda_D$  es pequeño (figura 3). Langmuir realizó un análisis de esta situación [3], y mostró que, para  $(-eV_s)$  y  $m_i U^2$  mucho mayores que  $K_B T_e$  y  $K_B T_i$  (donde  $e$  es la carga electrónica,  $m_i$  es la masa de los iones, y  $K_B$  es la constante de Boltzmann), la corriente eléctrica,  $I_{s\infty}$ , a una sonda de longitud  $l$  ( $l \rightarrow \infty$ ), viene dada aproximadamente por:

$$\frac{I_{s\infty}}{l} \approx 2 N_0 e (U \sin \theta) r_s \left[ 1 - \frac{2 Z_i e V_s}{m_i (U \sin \theta)^2} \right]^{1/2} \quad (1)$$

donde  $N_0$  es la densidad del plasma,  $\theta$  es el ángulo entre el eje de la sonda y  $\vec{U}$ , y  $Z_i$  es el número de carga de los iones. Nótese que según la Ec. (1)  $I_{s\infty}$  decrece monotónicamente cuando  $\theta$  va de  $\pi/2$  a cero.

En cualquier experimento real  $l$  debe tener un valor finito, naturalmente. Recientemente se han publicado resultados de experiencias, tanto de laboratorio [34], [35], como de satélite [36], bajo las condiciones  $r_s/\lambda_D \ll 1$ ,  $-eV_s$  y  $m_i U^2 \gg Z_i K_B T_e$ , y  $l/r_s \lesssim 820$ , que presentan una importante discrepancia con la Ec. (1). La corriente observada  $I_s$  permanece próxima a  $I_{s\infty}$  en tanto que  $\theta$  no es pequeño, pero cuando la sonda se aproxima a una orientación paralela a  $\vec{U}$ ,  $I_s$  exhibe un fuerte pico que culmina en  $\theta = 0$  en un valor mucho mayor que  $I_{s\infty}(\theta = 0)$  (fig. 4). Se puede explicar este fenómeno como un efecto de extremo debido a la longitud finita de la sonda [36], [37]. Es evidente que puede ser necesario el empleo de sondas extremadamente largas, si uno quiere usar la Ec. (1) para interpretar los resultados experimentales.

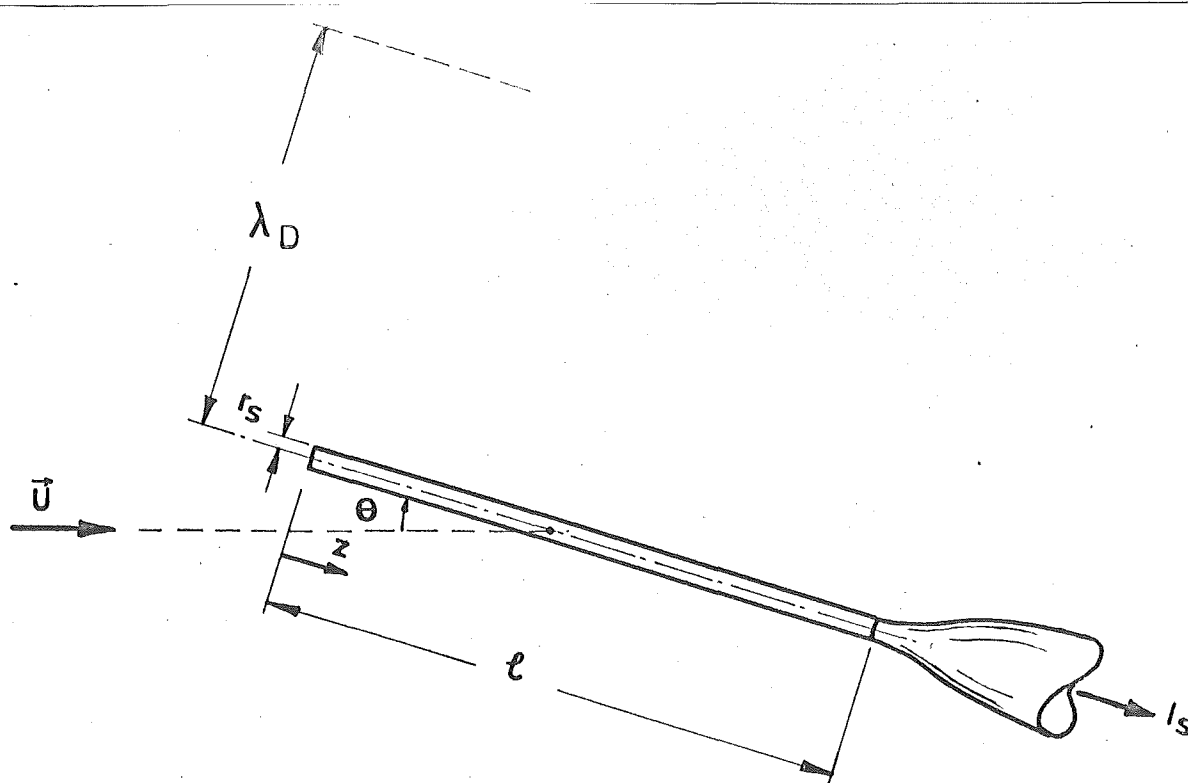


Fig.3 Movimiento relativo del plasma respecto a una sonda de Langmuir cilíndrica ( $r_s \ll \lambda_D$ ).

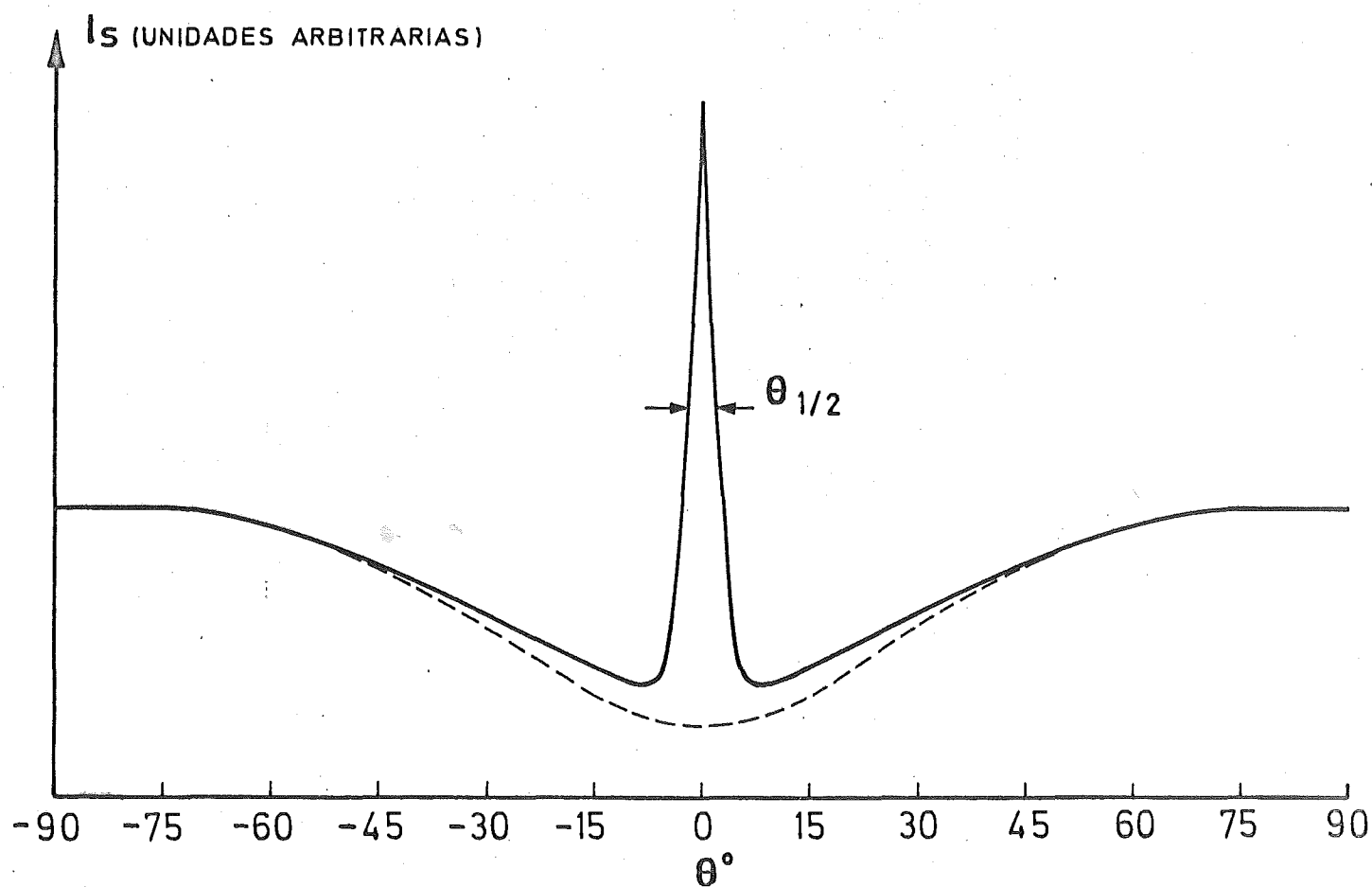


Fig.4 Corriente eléctrica recogida por la sonda de la Fig.3, en función del ángulo de ataque  $\theta$ , para  $U/\lambda_D \omega_{pi} = 38$ ,  $\lambda_D/r_s = 13$ ,  $\psi_s = -48$ ; línea continua, sonda con  $1/r_s = 450$ ; línea a trazos, sonda con  $1/r_s \rightarrow \infty$ . (Según la Ref. [37])

De mayor interés para la diagnosis de plasmas es el efecto de extremo en sí mismo. El máximo de la corriente puede ser muy acusado, y debiera ser posible aprovecharlo para obtener información sobre las propiedades del plasma y sobre la dirección del vector  $\vec{U}$ . De particular interés es que tanto la altura como la semianchura del máximo dependen sensiblemente de  $T_i$ . Esto es muy importante a causa de lo que se dijo anteriormente en relación con el criterio de Bohm. La importancia del efecto de extremo para el estudio de la ionosfera ha sido discutida recientemente [38].

El primer análisis, muy simplificado, de dicho efecto fué realizado por Bettinger y Chen [36]. Hester y Sonin [37] llevaron a cabo algunos cálculos numéricos para  $\theta = 0$  y  $l$  menor que cierta longitud  $l_m$  [ $l_m \approx 3\lambda_D (U/\lambda_D \omega_{pi})$  donde  $\omega_{pi}$  es la frecuencia iónica del plasma]; también mostraron que el análisis de la Ref. [36] está limitado al intervalo  $l > l_m$ . El análisis que se presenta en esta tesis es válido para  $\lambda_D \ll l \leq l_m$ , y  $\theta$  arbitrario dentro del intervalo angular que contiene al máximo de la corriente; el análisis parte de una similitud, señalada en la Ref. [37], entre el problema del efecto de extremo y un problema no estacionario que trata de un plasma en reposo.

En la próxima sección se plantean las ecuaciones necesarias para el estudio del efecto de extremo, y en la Sec. III se introducen las ideas básicas de una teoría desarrollada recientemente para el problema similar no estacionario [39]. En la Sec. IV se discute la aplicación de esa teoría al problema de esta tesis. En la Sec. V se presentan re-

sultados analíticos y gráficos para dicho problema; estos resultados se toman del desarrollo matemático para el problema similar no estacionario que se lleva a cabo en el Apéndice C. La Sec. VI trata de la comparación de aquellos resultados con los datos experimentales existentes. Las aplicaciones del -- efecto de extremo y las conclusiones del estudio se discuten en la Sec. VII. En el Apéndice D se discute la teoría de Bettinger y Chen [36].

El presente análisis está basado en varias aproximaciones. Algunas son obviamente justificables: se usa la ley de Boltzmann para la densidad de los electrones (Sec. II), y se desprecia el movimiento térmico de los iones en la dirección del eje de la sonda (Sec. II). Otras simplificaciones -- están ligadas a la cuestión de la validez de la similaridad de la Ref. [37]: (a) Se aproxima la velocidad de los iones a lo largo del eje de la sonda por su valor aguas arriba,  $U$ ; -- se desprecian en la ecuación de Poisson las segundas derivadas del campo potencial; (b) según la dirección del eje de la sonda, y (c) con respecto a un ángulo azimutal en torno a dicho eje; se desprecian (d) el campo potencial aguas arriba de la punta delantera de la sonda y (e) el cambio en el momento de la cantidad de movimiento de los iones. Las aproximaciones (a) y (b) se discuten en la Sec. IV, y las aproximaciones (c) (d) y (e) en el Apéndice B. Finalmente la solución misma del problema similar no estacionario se obtiene aproximando el -- campo potencial en la vecindad de la sonda por cierto campo estacionario; esto se discute en la Sec. III y en el Apéndice A.

## II.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL EFECTO DE EXTREMO.

Se considera una sonda cilíndrica de Langmuir, de longitud  $l$  y radio  $r_s$ , en un plasma rarificado de densidad electrónica  $N_0$  y temperaturas  $T_e$  (electrones) y  $T_i$  (iones); en un sistema de referencia ligado a la sonda, el plasma se mueve con una velocidad  $\vec{U}$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje de aquella (fig. 3). Se supone que el potencial de la sonda,  $V_s$ , es negativo y tal que

$$m_e U^2 \ll K_B T_e \ll -e V_s ;$$

es evidente que bajo tales condiciones muy pocos electrones alcanzan la sonda, y la densidad electrónica en torno a ella,  $N_e$ , viene dada aproximadamente por la ley de Boltzmann

$$N_e \approx N_0 \exp(-\Psi) \quad (2)$$

donde  $\Psi \equiv -e V / K_B T_e$  y  $V$  es el campo potencial establecido en el plasma. Definiendo

$$\beta = T_i / Z_i T_e , \quad M = U / \lambda_D \omega_{pi} , \quad (3)$$

$$\hat{l} = l / \lambda_D , \quad \epsilon = r_s / \lambda_D , \quad (4)$$

se supone también que  $M$  y  $\hat{l} \gg 1$ ,  $\epsilon \ll 1$  y  $\beta \lesssim 1$ , donde  $M$  es el número de Mach basado en la velocidad de las ondas iono-acústicas ( $\lambda_D \omega_{pi}$ ),  $\lambda_D$  es la longitud de Debye  $(K_B T_e / 4\pi N_0 e^2)^{1/2}$ ,  $\omega_{pi}$  es la frecuencia iónica del plasma  $(4\pi N_0 Z_i e^2 / m_i)^{1/2}$ , y  $m_i$  y  $Z_i$  son la masa y número de carga de los iones.

Si  $j(z)$  es la densidad de corriente en la superficie de la sonda\*, a una distancia  $z$  de su punta es evidente que la densidad de corriente media

---

\*  $j(z)$  es la densidad de corriente promediada sobre el contorno de la sonda en  $z$ .

$$\bar{j} \equiv l^{-1} \int_0^l j(z) dz \quad (5)$$

puede ser escrita como una función adimensional

$$\frac{\bar{j}}{j_\infty} = \frac{\bar{j}}{j_\infty} (\hat{l}, M, \varepsilon, \beta, \Psi_s, \theta), \quad (6)$$

donde  $\Psi_s \equiv -e V_s / K_B T_e$  y  $j_\infty \equiv \bar{j} (\hat{l} \rightarrow \infty)$ ; según la Ec.(1)

$$j_\infty \equiv \pi^{-1} N_0 e U \sin \theta \left[ 1 - 2 Z_i e V_s / m_i U^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2} \quad (7)$$

La corriente total a la sonda,  $I_s$ , es igual al producto de  $2\pi r_s l j_\infty$  y  $\bar{j}/j_\infty$ . Para obtener esta última cantidad hay que resolver la ecuación cinética para la función de distribución de los iones en las condiciones de un plasma rarificado (camino libre medio mucho mayor que las longitudes de interés  $r_s$  y  $\lambda_D$ ): la ecuación de Vlasov. Dado que ésta contiene el potencial  $\Psi$ , hay que resolver simultáneamente la ecuación de Poisson para  $\Psi$ , que en forma adimensional es

$$\frac{1}{\wp} \frac{\partial}{\partial \wp} \left( \wp \frac{\partial \Psi}{\partial \wp} \right) + \frac{1}{\wp^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\varepsilon^2}{\hat{l}^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} = \varepsilon^2 \nu \quad (8)$$

donde  $\wp = r/r_s$ ,  $\xi = z/l$ ,  $\nu = (Z_i N_i - N_e)/N_0$ , (9)

$N_i$  es la densidad iónica en torno a la sonda ( $Z_i N_i$  y  $N_e \rightarrow N_0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ ) y se han introducido obvias coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\varphi$  y  $z$ . Para cerrar el sistema formado por la ecuación iónica de Vlasov y la Ec.(8) se usa la Ec.(2) para eliminar  $N_e/N_0$  de la expresión  $\nu$  [en la inmediata proximidad de la sonda, donde la Ec.(2) no es válida, tanto  $N_e/N_0$  como  $\exp.(-\Psi)$  son exponencialmente pequeños en  $\Psi_s$ ].

Las condiciones de contorno para la Ec.(8) son

$$\psi(\rho = 1) = \psi_s \quad (10)$$

$$\psi(\rho \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (11)$$

En cuanto a la función de distribución iónica, es evidente que aun cuando se puede despreciar el movimiento térmico de los iones a lo largo del eje  $z$  (debido a las condiciones  $M \gg 1$  y  $\beta \leq 1$ ), no se puede hacer lo mismo con el movimiento en el plano  $(\rho, \phi)$ . Así pues, es preciso conocer la función de distribución iónica aguas arriba de la sonda; aun cuando la presente formulación tiene validez general, se supondrá más adelante que tal función es Maxwelliana. Por otra parte la superficie de la sonda se considera perfectamente absorbente.



### III.- SIMILARIDAD CON UN PROBLEMA NO ESTACIONARIO.

En su estudio sobre el límite  $\theta = 0$  (que también implica  $\partial/\partial\varphi = 0$ ), Hester y Sonin [36] observaron que si tanto  $\hat{l}$  como  $M^2/\psi_s$  son tan grandes que se puede despreciar  $\partial^2\psi/\partial z^2$  en la Ec.(8), y se puede aproximar la velocidad de los iones a lo largo del eje  $z$  por su valor aguas arriba,  $U$ , el problema presente, que trata de un movimiento estacionario, es similar a un problema no estacionario acerca de una sonda infinitamente larga que se situa en un plasma en reposo, en el instante  $t = 0$  (con todas las demás condiciones supuestas iguales en los dos problemas). El tiempo de viaje de los iones a lo largo de la sonda,  $z/U$ , y la densidad de corriente en  $z$  son respectivamente equivalentes al tiempo  $t$  y a la densidad de corriente (espacialmente uniforme) en el instante  $t$ . A medida que  $z$  (ó  $t$ ) aumenta, la función de distribución de los iones se reajusta, y para  $l$  (ó  $t$ )  $\rightarrow \infty$  la densidad de corriente alcanza el valor límite correspondiente a una sonda infinita (o en estado estacionario)  $j_\infty(\theta = 0)$ . En el contexto del problema no estacionario se puede escribir

$$\frac{\bar{j}}{j_\infty}(\theta = 0) = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{j(t) dt}{j_\infty(\theta = 0)} \quad (12)$$

donde  $t_1 = l/U \quad (13)$

es el tiempo equivalente a la longitud de la sonda.

El problema no estacionario ha sido recientemente estudiado por Sanmartin [38]. Su análisis se basa en las siguientes observaciones:

(1) Es posible derivar una expresión muy aproximada para el campo eléctrico  $\partial\Psi/\partial\rho$  (para valores limitados de  $\rho$ ) sin resolver simultáneamente la ecuación de Vlasov para los iones: Integrando la ecuación de Poisson

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) = \varepsilon^2 v \quad (14)$$

se obtiene la expresión formal

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = - \frac{\Psi_s \delta(t)}{\rho} + \frac{\varepsilon^2}{2\rho} (\rho^2 - 1) \langle v(\rho, t) \rangle \quad (15)$$

donde  $-\Psi_s \delta(t)$  es el campo eléctrico en la superficie de la sonda en el instante  $t$ , y  $\langle v \rangle$  está definido por

$$(\rho^2 - 1) \langle v(\rho, t) \rangle \equiv \int_1^{\rho^2} v(\rho', t) d(\rho'^2). \quad (16)$$

La función  $\delta(t)$  varía muy poco entre  $t=0$  y  $t=\infty$  así que en la Ec.(15) se puede usar un valor medio  $\bar{\delta}$  que está dado por

$$\bar{\delta}^{-1} = \ln \varepsilon^{-1} + Y(\varepsilon, \Psi_s) \quad (17)$$

donde  $Y$  viene dado en la figura 5. La función  $\langle v \rangle$  varía en el intervalo  $0 \leq \langle v \rangle \leq 1$ ; sin embargo, en un cierto entorno de la sonda [aproximadamente  $\rho \leq \rho_m \equiv (2 \Psi_s \bar{\delta})^{1/2} \varepsilon^{-1}$ ] se puede aproximar  $\langle v \rangle$  por una constante  $\bar{v} \approx 0.80$ . El error en el cálculo de la corriente que resulta de estas aproximaciones es del orden del 1%. Todas estas conclusiones son derivadas en el Apéndice A.

De lo que precede se deduce que para  $\rho \leq \rho_m$  se puede

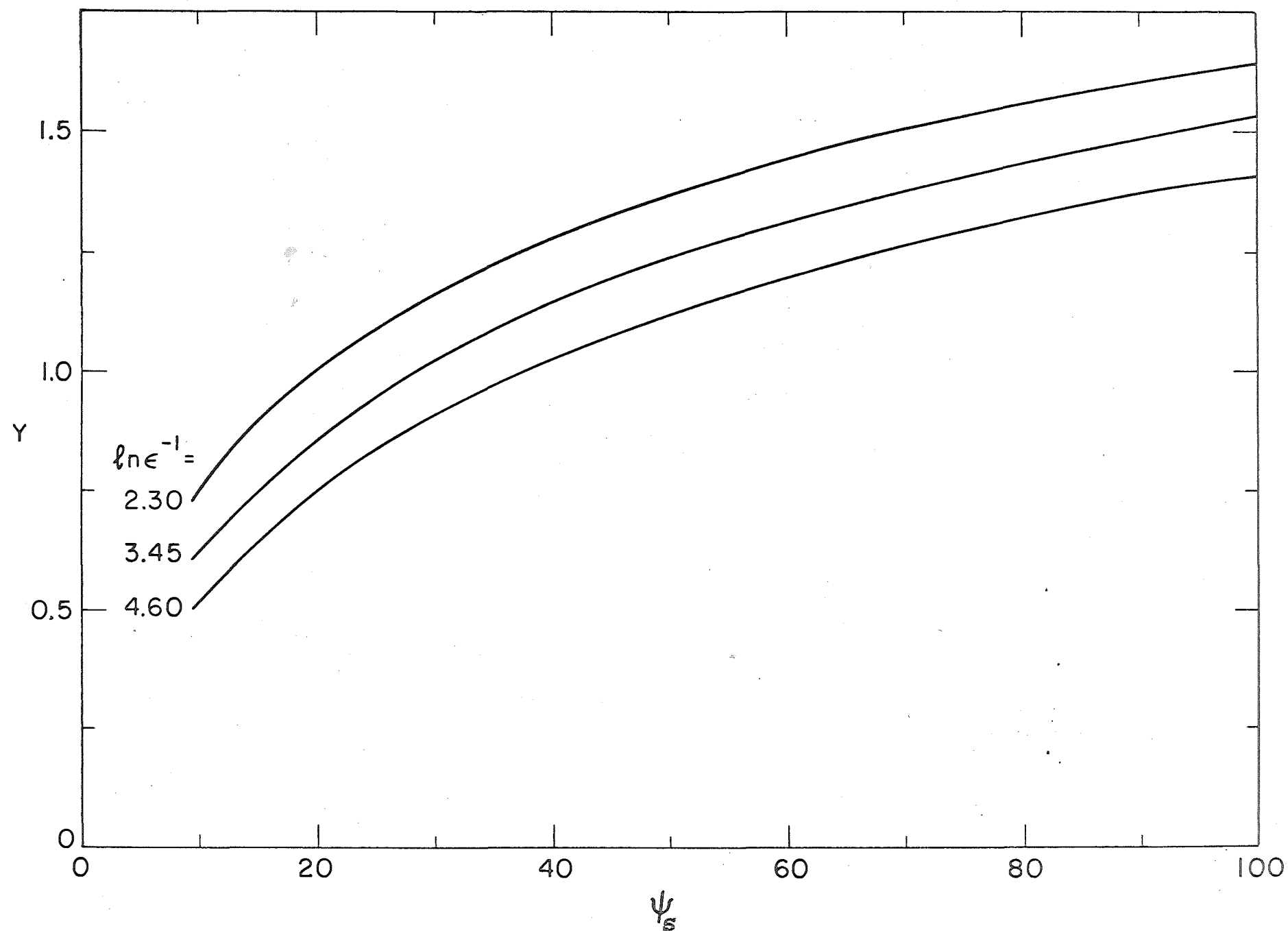


Fig.5. Parámetro  $Y$  del campo potencial en función del radio  $\epsilon$  y el potencial  $\psi_s$  (adimensionales) de la sonda.

de aproximar el campo eléctrico por una función que sólo depende de  $\rho$ ,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = -\psi_s \frac{\bar{\delta}}{\rho} + \frac{\varepsilon^2 \bar{\gamma}}{2\rho} (\rho^2 - 1). \quad (18)$$

Excepto por un factor de orden unidad  $\rho_m$  es igual a  $\exp(-\bar{\delta}^{-1})$  y puede ser considerado como el radio característico de la capa de Debye. Si  $t_m$  es el tiempo típico del viaje a la sonda de los iones que estaban en el límite de esa capa en  $t=0$ , está claro que el presente análisis sólo será válido para  $t \leq t_m$ .

(2) Conocido el campo eléctrico, se puede calcular explícitamente las trayectorias de los iones; por otra parte la corriente a la sonda se hace lineal en la función de distribución iónica en el plano  $(\rho, \phi)$  para  $t=0$ ,  $f_0(\vec{v}_1)$ . Basta, por tanto, determinar la corriente para la función  $f_0$  más sencilla: aquella para la cual todos los iones tengan velocidades de igual magnitud,  $v_1^*$ , y dirección (paralela a un eje polar escogido arbitrariamente; véase fig. 6). Una vez que la corriente (adimensional) correspondiente,  $\bar{j}^*(v_1^*)/j_\omega$ , haya sido calculada, la corriente para cualquier otra forma de  $f_0$  vendrá dada por la integral  $\int f_0(\vec{v}_1^*) d\vec{v}_1^* \bar{j}^*(v_1^*)/j_\omega$ .

Para calcular  $\bar{j}^*/j_\omega$  se usan las ecuaciones de conservación de la energía y del momento de la cantidad de movimiento, para dividir el plano  $(\rho, \phi)$  en  $t=0$  en dos regiones mutuamente exclusivas  $A^*(v_1^*)$  y  $B^*(v_1^*)$  (fig. 6), tales que un punto  $(\rho, \phi)$  pertenece a  $A^*$  si un ión con tales coordenadas en  $t=0$ , y moviéndose bajo la acción del campo dado por



la Ec.(18), alcanzará la sonda para algún  $t > 0$ . El tiempo de viaje a la sonda de cada "punto" de  $A^*$  puede ser calculado y por lo tanto se puede construir una función  $a^*(v_1^*, t)$  que representa el área de la parte de  $A^*$  que ha sido "recogida" por la sonda antes del instante  $t$ . La corriente por unidad de longitud de la sonda es entonces

$$2 \pi r_s j^*(t) = N_0 e \partial a^* / \partial t \quad (19)$$

y definiendo  $a(t) = \int_{a^*} f_0(v_1^*) dv_1^*$ , se obtiene:

$$2 \pi r_s j(t) = N_0 e da/dt \quad (20)$$

El valor medio de  $j$  es

$$\bar{j} = \frac{N_0 e}{2 \pi r_s} \frac{a(t)}{t} \quad (21)$$

y en forma adimensional

$$\bar{j}/j_\infty = \varepsilon \hat{a}(\tau) / (8 \psi_s)^{1/2} \tau \quad (22)$$

donde  $\tau = \omega_{pi} t$  y  $\hat{a}$  es una forma adimensional del área,  $\hat{a} \equiv a/r_s^2$ .

Se puede determinar el comportamiento general de  $\bar{j}/j_\infty$  por medio de un análisis cualitativo de  $\bar{j}^*/j_\infty$ , escogiendo un valor de  $v_1^*$  que sea del orden de la velocidad característica de los iones. La condición de que un punto  $(\rho_0, \phi_0)$  pertenezca a  $A^*$  se obtiene fácilmente de las ecuaciones de la energía y del momento de la cantidad de movimiento de un ión con tales coordenadas en  $t=0$ . Se obtiene la condición

[38]

$$|\text{sen } \varphi_0| \leq G(\rho_0)/\rho_0, \quad (23)$$

$$G \equiv \left[ 1 + (\alpha^*)^{-1} \ln \rho_0^2 - \bar{v}(\rho_0^2 - 1)/\alpha^* \rho_m^2 \right]^{1/2} \quad (24)$$

donde

$$\alpha^* = \frac{2\beta^*}{\psi_s \bar{\delta}}, \quad \beta^* = \frac{m_i (v_i^*)^2}{2 Z_i K_B T_e} \quad (25)$$

Para  $\psi_s \gg 1$  y  $\beta^* \leq 1$ , como se supone aquí, se tiene  $\alpha^* \ll 1$ . Para todo  $\alpha^* < 1$  hay un valor  $\rho_q$  tal que  $G(\rho_q)/\rho_q = 1$ , y entonces  $G(\rho_0)/\rho_0 > 1$  para  $\rho_0 < \rho_q$ ;  $\bar{\rho}_A(\varphi)$ , el límite de  $A^*$  dado por la ecuación (24), tiene la forma indicada en la fig. 6\*. Si se consideran valores crecientes de  $v_i^*$ ,  $\alpha^*$  crece y el punto q baja, alcanzando la curva  $\rho = 1$  cuando  $\alpha^* = 1$ ; para  $\alpha^* > 1$ , se tiene  $G(\rho_0)/\rho_0 \leq 1$  para todo  $\rho_0 \geq 1$ . Dado que el potencial es prácticamente logarítmico para  $\rho < \rho_m/3$ , aproximadamente [véase la Ec.(18)], se obtiene que la velocidad radial media de un ión con  $(\rho_0, \varphi_0)$  en esa región, en su viaje a la sonda, es prácticamente independiente de  $(\rho_0, \varphi_0)$ ; específicamente,  $\rho_0/\tau_0 \sim \rho_m$  donde  $\tau_0(\rho_0, \varphi_0)$  es el tiempo de viaje a la sonda. Por tanto, en tanto que  $\rho_0 < \rho_q$ , se tendrá

$$\hat{a}^* \sim \rho_m^2 \tau^2 \sim \psi_s \bar{\delta} \tau^2 / \varepsilon^2 \quad (26)$$

$$\text{y} \quad \bar{j}^*/j_\omega \sim \varepsilon \hat{a}^* / \tau \psi_s^{1/2} \sim \psi_s^{1/2} \tau \bar{\delta} / \varepsilon. \quad (27)$$

Así pues  $\bar{j}^*/j_\omega$  crece linealmente con  $\tau$  hasta que  $\tau = \tau_q \equiv \tau_0(\rho_0 = \rho_q, \varphi_0 = \pi/2)$ ;  $\hat{a}^*$  cambia entonces de una dependencia

---

\* El otro límite de A en la fig. 6,  $\bar{\rho}_A(\varphi)$ , no interviene en este análisis porque  $\bar{\rho}_A(\varphi) > \rho_m$  [38].

cuadrática a una dependencia casi lineal en  $\rho_0$ . Para valores de  $\tau$  todavía mayores,  $\bar{j}^{\pm}/j_{\omega}$  empieza a decrecer porque iones que estaban inicialmente fuera de la región en que  $\partial\psi/\partial\rho \sim \rho^{-1}$  comienzan a alcanzar la sonda; para tales iones  $\rho_0/\tau_0$  decrece rápidamente con  $\rho_0$ , debido a la disminución del potencial. Despreciando variaciones logarítmicas se obtiene de la Ec.(23)

$$\rho_q \sim (\psi_s \bar{\delta} / \beta^{\pm})^{1/2} \quad (28)$$

así que poniendo  $\tau = \tau_q \sim \rho_q / \rho_0$  en (27) se obtiene el máximo de  $\bar{j}^{\pm}/j_{\omega}$ ,

$$\bar{j}^{\pm}/j_{\omega} \Big|_{\text{máx}} \sim (\psi_s / \beta^{\pm})^{1/2} \bar{\delta}, \quad (29)$$

valor que puede exceder mucho a la unidad, y que depende de  $\beta^{\pm}$ . La causa de este máximo es que el campo potencial es establecido tan repentinamente que atrapa en la vecindad de la sonda a iones con un valor pequeño del momento de la cantidad de movimiento. Cuando  $\beta^{\pm}$  aumenta,  $\rho_q$  crece y la región de iones con momento pequeño aumenta también. Para valores decrecientes de  $v_{\perp}^{\pm}$  se alcanza un valor crítico de  $\beta^{\pm}$  para el cual  $\rho_q$  sale de la región  $\partial\psi/\partial\rho \sim \rho^{-1}$ ; en tal caso, el crecimiento de  $\bar{j}^{\pm}/j_{\omega}$ , dado por la Ec.(27), es interrumpido por la rápida disminución de  $\rho_0/\tau_0$  para  $\rho_0$  creciente, y no por el hecho de que el límite de  $A^{\pm}$  haya sido alcanzado. Este efecto es el mismo para todos los valores de  $\beta^{\pm}$  menores que el crítico, por lo que la corriente se hace entonces insensitiva a esa cantidad. El valor crítico de  $\beta^{\pm}$  se encuentra poniendo  $\rho_q \sim \rho_m$ , esto es,  $\tau_q \sim 1$ , así que



$$\beta_{cr}^* \sim \varepsilon^2; \quad (30)$$

la máxima corriente posible es, por tanto,

$$\bar{j}^*/j_{\omega} \sim \psi_s^{1/2} \bar{\delta}/\varepsilon. \quad (31)$$

#### IV.- EXTENSION DEL ANALISIS AL PROBLEMA DEL EFECTO DE EXTREMO

Según la similaridad establecida en la Ref. [37] - (similaridad H-S), las funciones dadas en las Ecs.(6) (para  $\theta=0$ ) y (22) son iguales. La ecuación (22) depende de  $\tau, \varepsilon, \beta, \psi_s$ . En el problema estacionario el valor correspondiente a  $\tau$  es  $\tau_1 \equiv \omega_{pi} t_1 = \hat{l}/M$ ; por tanto los parámetros  $\hat{l}$  y  $M$  en la Ec.(6) aparecen combinados en uno solo. Todos los resultados cualitativos sobre  $\bar{j}/j_\omega$  que se derivaron en la sección anterior tienen validez en el problema estacionario. Hay que hacer sin embargo dos nuevas consideraciones: (a) Para el problema estacionario, las Ecs.(21) y (22) se transforman en

$$\bar{j} = \frac{N_0 e U a (1/U)}{2 \pi r_s l} \quad (32)$$

$$\frac{\bar{j}}{j_\omega} = \frac{\varepsilon M \hat{a} (\hat{l}/M)}{(8 \psi_s)^{1/2} \hat{l}} \quad (33)$$

La ecuación (32) ilustra el significado de  $a(1/U)$ : La corriente total es

$$I_s = 2 \pi r_s l \bar{j} = N_0 e U a (1/U) \quad (34)$$

así que  $a(1/U)$  es la sección transversal efectiva de la sonda. (b) Como ya se ha indicado, el análisis de la Ref. [38] es sólo válido para  $t \lesssim t_m$ ; en dicha referencia se obtiene que  $\tau_m \equiv \omega_{pi} t_m \approx 3$ . Así pues los resultados del presente trabajo serán válidos para

$$\hat{l} \lesssim 3 M \quad (35)$$

El máximo de  $\bar{j}/j_\omega$  ocurre para  $\tau \approx 1$ .

La teoría recién expuesta explica el gran valor de

$\bar{j}/j_\omega$  para  $\theta = 0$ . También puede explicar la fuerte disminución de la corriente cuando se gira la sonda un pequeño ángulo. - Para  $\theta \neq 0$ , el problema cambia en tres aspectos. Primero, la función de distribución iónica en el plano  $(\rho, \phi)$ ,  $f_0(\vec{v}_1^*)$ , contiene ahora una pequeña velocidad de deriva,  $U \sin \theta$ . Segundo, el operador Laplaciana en la ecuación de Poisson incluye el término  $\rho^{-2} \partial^2 \psi / \partial \phi^2$ . Finalmente, el momento de la cantidad de movimiento de los iones no se conserva, dado que el campo potencial no es un campo central. Supondremos ahora que los dos últimos cambios tienen una influencia despreciable - sobre la corriente recogida por la sonda; esto se justifica en el Apéndice B. Bajo tales condiciones el análisis de  $\bar{j}^*/j_\omega$  ( $\vec{v}_1^*$  arbitrario) que se realizó en la Sec. III no sufre alteración; la deriva  $U \sin \theta$  se tiene en cuenta usando la nueva forma de  $f_0(\vec{v}_1^*)$  la cual presenta no una, sino dos velocidades características:  $(K_B T_i / m_i)^{1/2}$  y  $U \sin \theta$ . Está claro que la Ec.(6) puede escribirse en la forma:

$$\frac{\bar{j}}{j_\omega} = \frac{\bar{j}}{j_\omega} \left( \frac{\hat{1}}{M \cos \theta}, \varepsilon, \beta, \frac{M^2 \sin^2 \theta}{2}, \psi_s \right); \quad (36)$$

dado que la región de interés es  $\theta \ll 1$ , se puede escribir  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$  en la Ec.(36). Los valores característicos de  $\beta^*$  y  $\alpha^*$  que han de introducirse ahora en nuestra anterior discusión sobre  $\bar{j}^*/j_\omega$ , no son  $\beta^* \approx \beta$  y  $\alpha^* \approx 2\beta/\psi_s \bar{\delta}$ , sino

$$\beta^* \approx \beta + M^2 \theta^2 / 2 \equiv \beta_T \quad (37)$$

$$\alpha^* \approx \frac{2}{\psi_s \bar{\delta}} \left( \beta + \frac{M^2 \theta^2}{2} \right) \equiv \alpha_T \quad (38)$$

(aunque los efectos de  $\beta$  y  $M^2\theta^2/2$  en (36) no son aditivos, se pueden considerar así en una discusión cualitativa). Mientras  $\theta$  sea tan pequeño que  $\beta_T \approx \beta$ , la corriente permanece prácticamente constante. En cuanto  $\theta$  se hace del orden de la mayor de las cantidades  $(2\beta)^{1/2}/M$  y  $(2\varepsilon^2)^{1/2}/M$ , la corriente comienza a disminuir. Cuando  $\theta$  es tan grande que  $\alpha_T \geq 1$ , se tiene  $\rho_q \leq 1$  así que la función  $G(\rho_0)/\rho_0$  en la Ec.(23) es menor que la unidad; en ese caso  $\hat{a}^*$  crece (casi) linealmente con  $\rho_0$  mientras que  $\rho_0/\tau_0$  permanece casi constante. Así pues  $\bar{j}^*/j_\omega \approx 1$  (excepto si  $\hat{l}/M$  es muy pequeño). De hecho el máximo de la corriente desaparece para un valor de  $\theta$  más pequeño que el valor que hace  $\alpha_T = 1$ .

Antes de usar los resultados del análisis del problema no-estacionario en el caso estacionario, es preciso examinar cuidadosamente las dos condiciones que conducen a la similitud H-S: (A) Si se retiene el término  $\partial^2\psi/\partial\xi^2$  en la ecuación de Poisson (8), la Ec.(15) se transforma en

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \frac{-\psi_s \delta(\xi)}{\rho} + \frac{\varepsilon^2}{2\rho} \left\langle v(\rho, \xi) - \hat{l}^{-2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} \right\rangle (\rho^2 - 1) \quad (39)$$

donde  $\langle \rangle$  tiene el mismo significado de la Ec.(16) y donde además se ha usado la variable  $\xi$ , equivalente a  $\tau$ . Despreciar el término  $\partial^2\psi/\partial\xi^2$ , como se indicaba en la Sec. III, equivale, por tanto, a escribir

$$\left\langle v - \hat{l}^{-2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} \right\rangle \approx \langle v \rangle \quad (40)$$

en la Ec.(39). Esta misma ecuación puede ser usada para obte

ner  $\partial^2 \psi / \partial \xi^2$ : integrándola una vez con respecto a  $\rho$  y derivando dos veces con respecto a  $\xi$ , se obtiene (si (40) es válida),

$$\hat{1}^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \approx \frac{\psi_s \bar{\delta}}{2 \hat{1}^2} \left[ 2 \delta \ln \rho \left\{ \frac{d^2 \delta^{-1}}{d \xi^2} - 2 \delta \left( \frac{d \delta^{-1}}{d \xi} \right)^2 \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\delta}}{\delta} \int_1^\rho \frac{2(\rho' - 1/\rho') d \rho'}{\rho_m^2} \left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} \right\rangle \right] \quad (41)$$

así que

$$\left\langle \nu - \hat{1}^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right\rangle \approx \bar{\nu} - \frac{\psi_s \bar{\delta}}{2 \hat{1}^2} \left[ \bar{\delta} (2 \ln \rho - 1) \left\langle \frac{d^2 \delta^{-1}}{d \xi^2} - 2 \delta \left( \frac{d \delta^{-1}}{d \xi} \right)^2 \right\rangle + \frac{\rho^2}{2 \rho_m^2} \left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} \right\rangle \right] \quad (42)$$

Tanto  $(2 \ln \rho - 1)$  como  $\rho^2$  presentan un máximo absoluto en el máximo valor de  $\rho$  considerado; por tanto se tiene

$$\left\langle \nu - \hat{1}^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right\rangle_{\rho \approx \rho_m} \approx \bar{\nu} - \frac{\psi_s \bar{\delta}}{2 \hat{1}^2} \left\langle 2 \frac{d^2 \delta^{-1}}{d \xi^2} - 4 \delta \left( \frac{d \delta^{-1}}{d \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} \right\rangle \quad (43)$$

Por otra parte se cumple aproximadamente (Apéndice A) que:

$$\frac{d \delta^{-1}}{d \xi} \approx \frac{\Delta \delta^{-1}}{\Delta \xi} = \Delta \delta^{-1} < \delta^{-1}(\xi = \infty) - \delta^{-1}(\xi = 0), \quad (44)$$

$$\frac{d^2 \delta^{-1}}{d \xi^2} \approx 2 \Delta \delta^{-1}, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} \approx 2 \Delta \nu. \quad (45)$$

Para los valores típicos de  $\xi$  y  $\psi_s$  considerados

en este análisis se tiene,  $\delta^{-1}(\xi = \infty) - \delta^{-1}(\xi = 0) \approx 0.15$  y  $\Delta v < 0.20$ . Se obtiene

$$\left\langle v - \hat{1}^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right\rangle_{\xi \approx \xi_m} \approx \bar{v} - \frac{4 \psi_s \bar{\delta}}{\hat{1}^2} \times 10^{-1}. \quad (46)$$

Dado que  $4\bar{\delta}$  es del orden de la unidad y el error absoluto en la aproximación  $\langle v \rangle \approx \bar{v}$  es del orden de 0.1 resulta que la condición buscada es

$$\hat{1} > \psi_s^{1/2}. \quad (47)$$

(B) Si se integra dos veces la ecuación de movimiento de un ión a lo largo del eje  $z$  entre  $z=0$  y  $z=1$ , con condiciones iniciales  $z=0$  y  $dz/dt=U$ , se obtiene una ecuación para el tiempo  $t_1$  que el ión tarda en recorrer la sonda,

$$1 = \frac{U t_1}{1} \left( 1 + \frac{U t_1}{1} \frac{\bar{\psi}_s}{2 M^2} \right), \quad (48)$$

donde  $\bar{\psi}_s$  está dado por

$$t_1^2 \bar{\psi}_s = 2 \int_0^{t_1} (t_1 - t) dt \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (49)$$

y esta integral se calcula a lo largo de la trayectoria del ión. Si  $\partial \psi / \partial \xi$  es lo suficientemente pequeño el paréntesis de la Ec.(48) se reduce a la unidad y se obtiene el valor de  $t_1$  para movimiento uniforme  $t_1 = 1/U$ , sobre el cual se basa la similaridad H-S. Esto solo puede ser verdad si  $\bar{\psi}_s / 2M^2 \ll 1$ . Integrando la Ec.(39) con respecto a  $\xi$  y derivando con res-

pecto a  $\xi$  se obtiene:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \psi_s (\ln \rho) \delta^2 \frac{d\delta^{-1}}{d\xi} + \varepsilon^2 \int_1^\rho \frac{\rho'^2 - 1}{2\rho'} d\rho' \left\langle \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\rangle \quad (50)$$

así que, como máximo,

$$\frac{\bar{\psi}_\xi}{2 M^2} \approx 0.4 \frac{\bar{\delta} \psi_s}{4 M^2} \quad (51)$$

donde se consideró el peor caso posible ( $\rho$  igual a  $\rho_m$  inicialmente) y se estimó  $d\delta^{-1}/d\xi \approx 0.15$ ,  $\partial v/\partial \xi \approx 0.20$ . De la Ec.(51) resulta que si

$$\psi_s < M^2 \quad (52)$$

se tendrá  $t_1 = 1/U$  con un error de menos del 3%.

Finalmente se hace ver que (a) para obtener de hecho la corriente captada por la sonda se debe añadir a la Ec. (34) la expresión  $N_0 e \pi r_s^2$  [el extremo delantero de la sonda fué excluida de  $a(1/U)$ ], y (b) el análisis de la Ref. [38] trataba de una sonda cuyo potencial era cambiado de cero a  $V_s$  en el instante  $t=0$  (en lugar de una sonda introducida repentinamente en el plasma). Las obvias correcciones que resultan de esto solo son importantes si  $\tau_1 \ll 1$ , pero serán incorporadas a los resultados de la próxima sección.

# V.- RESULTADOS ANALITICOS Y GRAFICOS Y DISCUSION.

En el Apéndice C se presenta el desarrollo matemático que conduce a una fórmula para  $\bar{j}^*/j_\omega$  en el problema no estacionario. Según lo indicado en las Secs. III y IV, se puede usar esta fórmula directamente en el problema del movimiento estacionario, sin más que poner  $\tau = \tau_1 \equiv \hat{l}/M$ . Así pues, se tiene

$$\frac{\bar{j}^*}{j_\omega} = \frac{\epsilon M \pi \sigma^2}{(8 \psi_s)^{1/2} \hat{l}}, \quad \alpha^* < h \quad (53)$$

$$= \frac{\epsilon M \pi \sigma^2}{(8 \psi_s)^{1/2} \hat{l}} \left[ \frac{2}{\pi} \left\{ \sin^{-1} \left( \frac{h}{\alpha^*} \right)^{1/2} + \frac{(\alpha^*/h - 1)^{1/2}}{\alpha^*/h} \right\} + \frac{h}{\alpha^*} 2 \frac{1 - \sigma^{-2}}{\ln \sigma^2} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{h}{\alpha^*} \right)^{1/2} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\alpha^*}{h} - 1 \right)^{1/2} \right\} \right], \quad \alpha^* > h \quad (54)$$

donde  $\sigma$  viene dada por

$$\sigma E_{rf} (\ln \sigma)^{1/2} = (2 \psi_s \delta)^{1/2} \hat{l}/M \epsilon (\pi + 0.6 \hat{l}^2/M^2)^{1/2} \quad (55)$$

$$y \quad h = \ln \sigma^2 / (\sigma^2 - 1). \quad (56)$$

La corriente iónica adimensional  $\bar{j}/j_\omega$  viene dada por la ecuación

$$\bar{j}/j_\omega = \int d\vec{v}_1^* f_0(\vec{v}_1^*) \bar{j}^*/j_\omega. \quad (57)$$

La función de distribución iónica en el plano  $z=0$  es una distribución Maxwelliana con una velocidad de deriva  $U\theta$  (sen  $\theta \approx \theta$  para los ángulos de interés) <sup>asi</sup> que la Ec.(57) da



$$\begin{aligned} \frac{\bar{j}}{j_{\omega}} &= \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\infty} v_{\perp}^* dv_{\perp}^* \frac{m_i}{2\pi K_B T_i} \exp \left[ \frac{-m_i}{2\pi K_B T_i} \left\{ (v_{\perp}^*)^2 + U^2 \theta^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 v_{\perp}^* U \theta \cos \gamma \right\} \right] \bar{j}^*/j_{\omega} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dv}{\eta} \exp\left(-\frac{v}{\eta}\right) \exp\left(-\frac{\mu^2}{\eta}\right) I_0\left(2\frac{\mu}{\eta} v^{1/2}\right) \frac{\bar{j}^*}{j_{\omega}} \quad (58) \end{aligned}$$

donde  $I_0$  es la función de Bessel modificada de orden cero y

$$\eta = \frac{2\beta(\sigma^2-1)}{\psi_s \delta \ln \sigma^2}, \quad \mu^2 = \frac{M^2 \theta^2 (\sigma^2-1)}{\psi_s \delta \ln \sigma^2} \quad (59)$$

Usando las Ecs. (53) y (54), se puede escribir la Ec. (58) en la forma

$$\frac{\bar{j}}{j_{\omega}} = \frac{\pi \epsilon \sigma^2 M}{(8 \psi_s)^{1/2} \hat{1}} X(\mu, \eta, s) \quad (60)$$

donde

$$X \equiv X_0(\mu, \eta) + s X_1(\mu, \eta), \quad s = 2(1-\sigma^{-2})/\ln \sigma^2 \quad (61)$$

y

$$\begin{aligned} X_0(\mu, \eta) \equiv X_0^{\mu\eta} &= \eta^{-1} \exp(-\mu^2/\eta) \int_0^1 dv \exp(-v/\eta) I_0(2\mu v^{1/2}/\eta) \\ &+ \eta^{-1} \exp(-\frac{\mu^2}{\eta}) \int_1^{\infty} dv \exp(-\frac{v}{\eta}) I_0(2\mu \frac{v^{1/2}}{\eta}) \frac{2}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{1}{v^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(v-1)^{1/2}}{v} \right] \quad (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1(\mu, \eta) \equiv X_1^{\mu\eta} &= \eta^{-1} \exp(-\frac{\mu^2}{\eta}) \int_1^{\infty} dv \exp(-\frac{v}{\eta}) I_0(2\mu v^{1/2}/\eta) \frac{1}{v} \\ &\times \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{v^{1/2}} - \frac{2}{\pi} (v-1)^{1/2} \right] \quad (63) \end{aligned}$$

No es posible llevar a cabo la integración analítica de las Ecs. (62) y (63), aunque varios casos límite son fácilmente integrables. En particular, para  $\eta \rightarrow 0$  (límite de temperatura iónica nula) se obtiene

$$X_0^{\mu_0} + s X_1^{\mu_0} = 1, \quad \mu \leq 1 \quad (64)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \sin^{-1} \frac{1}{\mu} + \frac{(\mu^2 - 1)^{1/2}}{\mu^2} \right] + \frac{s}{\mu^2} \\ \times \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \frac{1}{\mu} - \frac{2}{\pi} (\mu^2 - 1)^{1/2} \right], \quad \mu \geq 1 \quad (65)$$

mientras que para  $\mu \rightarrow 0$ , se tiene

$$X_0^{0\eta} + s X_1^{0\eta} = \text{Erf } \eta^{-1/2} + 2(\pi \eta)^{-1/2} \exp(-\eta^{-1}) - 2\eta^{-1} \text{Erfc } \eta^{-1/2} \\ + s \left[ \eta^{-1} E_1(2\eta^{-1}) - 2(\pi \eta)^{-1/2} \exp(-\eta^{-1}) \text{Erfc } \eta^{-1/2} \right]. \quad (66)$$

Para  $\eta$  fijado y  $\mu \rightarrow \infty$ , se tiene:

$$X_0^{\mu\eta} + s X_1^{\mu\eta} \approx X_0^{\mu_0} + s X_1^{\mu_0} \approx \frac{4}{\pi\mu} - s \frac{2}{\pi\mu}, \quad (67)$$

esto es, todas las curvas tienden a la curva límite correspondiente a  $T_i = 0$ . Finalmente para  $\mu^2/\eta$  fijado y  $\eta \rightarrow \infty$ , se llega a

$$X_0^{\mu\eta} + s X_1^{\mu\eta} \approx \frac{4}{(\pi\eta)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\eta}\right) I_0\left(\frac{\mu^2}{2\eta}\right) \left(1 - \frac{s}{2}\right), \quad (68)$$

Cuando  $\mu^2/2\eta \rightarrow 0$  el lado de la derecha de esta ecuación tiende a  $4(\pi\eta)^{-1/2} (1 - s/2)$ , coincidiendo con el límite  $\eta \rightarrow \infty$  de la Ec.(66). Por otra parte la Ec.(68) puede escribirse también de la forma

$$X_0^{\mu\eta} + s X_1^{\mu\eta} \approx \frac{4}{\pi\mu} \left(\frac{\mu^2}{2\eta}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\eta}\right) I_0\left(\frac{\mu^2}{2\eta}\right) (2\pi)^{1/2} \left(1 - \frac{s}{2}\right) \quad (69)$$

que en el límite  $\mu^2/2\eta \rightarrow \infty$  coincide con la Ec.(67) y con la forma límite de la Ec.(65) para  $\mu \rightarrow \infty$ .

$X(\equiv X_0 + s X_1)$  está dado gráficamente en la fig. 7, como una familia de curvas  $X(\mu)$  con parámetro  $\eta$  <sup>\*</sup>. Para cada  $\eta$ , se presentan curvas para dos valores de  $s$  ( $s=0$ ,  $s=1/3$ ). Dado que  $X$  es lineal en esta variable, se puede interpolar y extrapolar exactamente para otros valores de  $s$ ; - debe observarse que  $X$  es siempre muy próximo a  $X_0$ . La función  $X(\mu)$  es una representación directa de la estructura del máximo, dado que  $X \sim \bar{j}/j_\infty$  y  $\mu \sim \theta$ .

Al calcular  $X$  numéricamente para  $\eta$  grande, se observa un fenómeno inesperado: al aproximarse a la curva  $\eta=0$ , cada línea  $\eta = \text{constante}$  (grande) excede a aquella y luego se le aproxima desde arriba [ $X(\eta) > X(\eta=0)$ ]. Este efecto fué tan pequeño en las curvas de la fig. 7 que no se pudo representar claramente en la figura, por lo cual todas las curvas se interrumpieron en su primera intersección con la línea  $\eta=0$ . La existencia de este fenómeno puede ser deducida explícitamente de la misma Ec.(69), válida para  $\eta$  grande: la función

---

\* Los aspectos cualitativos de la fig. 7 (así como de las figuras 9-11) están en completo acuerdo con la discusión de las Secs. III y IV. Por ejemplo, el brusco cambio de pendiente de la curva  $X(\mu, \eta=0)$  en  $\mu=1$  ocurre cuando  $U\theta$  es tal que  $\tau_1 = \tau_q$ ; si  $T_i \neq 0$ , hay un espectro continuo de valores de  $\theta_q$  y el ángulo en  $\mu=1$  se suaviza.

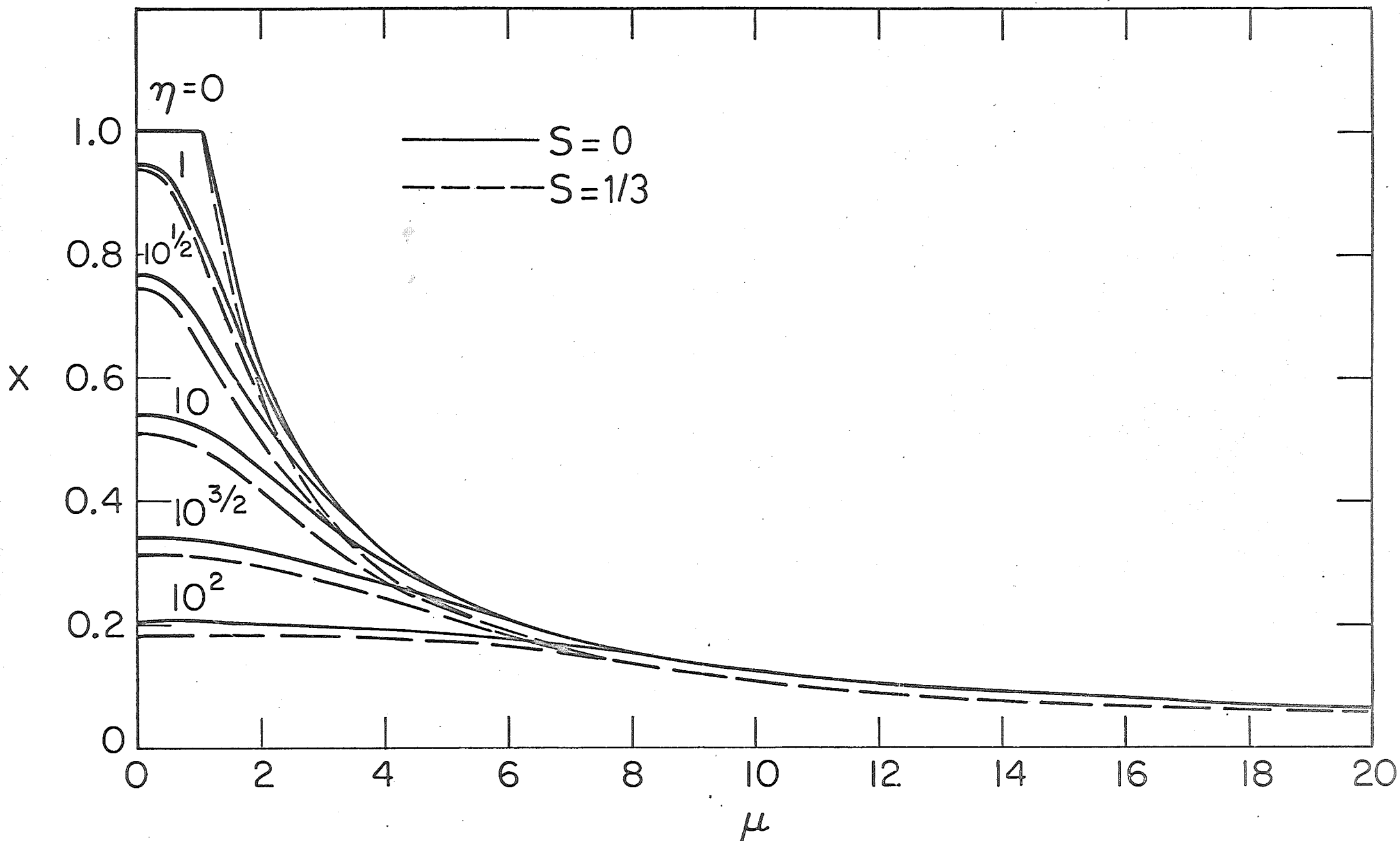


Fig.7 Corriente normalizada  $X$  en el intervalo angular del máximo, en función de la temperatura iónica  $\eta$  y el ángulo  $\mu$  (normalizados), y el parámetro  $s$ .

$$(2 \pi y)^{1/2} \exp(-y) I_0(y),$$

la cual es cero para  $y=0$  y tiende a la unidad para  $y \rightarrow \infty$ , tiene un máximo igual a 1.17 para  $y \approx 0.80$ .

El hecho de que la curva  $X(\mu, \eta=0)$  no sea una cota superior de la familia de curvas  $X(\mu, \eta=\text{constante})$  implica que no se cumple la desigualdad  $\partial X / \partial \eta < 0$  para todos los valores de  $\eta$  y  $\mu$ , como a primera vista se esperaría. Se puede entender esto observando que la velocidad de un ión es la suma de dos vectores: la velocidad de deriva, que tiene una orientación fija, y la velocidad térmica, cuya función de distribución no depende de la orientación. Si  $\delta$  es el ángulo que forman estas dos velocidades, está claro que un incremento del módulo de una de ellas puede disminuir el módulo del vector suma para un cierto intervalo de valores de  $\delta$ ; bajo algunas condiciones el aumento en la parte de la corriente total debida a este intervalo, puede dominar la disminución que aparece para los otros valores de  $\delta$ .

De las Ecs. (64)-(65) y (66) se pueden derivar fórmulas explícitas para las características principales del máximo de la corriente: la altura, y la semianchura angular  $\hat{\theta}_{1/2}$  (que es el doble del ángulo  $\theta$  para el que el valor de la corriente es igual a la mitad de su valor máximo). Para la altura del máximo se tiene

$$\left. \frac{\bar{j}}{j\omega} \right|_{\max} = \frac{\bar{j}}{j\omega} (\theta=0) = \frac{\pi \epsilon \sigma^2 M}{(8 \psi_s)^{1/2} \hat{1}} \left[ X_0^{o\eta} + s X_1^{o\eta} \right]; \quad (70)$$

las funciones  $X_0^{o\eta}$  y  $X_1^{o\eta}$  están dadas en la Ec. (66) y están re

presentadas en la fig. 8. Para la semianchura se tiene la condición

$$X_0^{\mu\eta} + s X_1^{\mu\eta} = 0.5 [X_0^{0\eta} + s X_1^{0\eta}] \quad (71)$$

donde, según la Ec.(59), se tiene

$$\mu = \hat{\mu}_{1/2} \equiv \frac{M \hat{\theta}_{1/2} (\sigma^2 - 1)^{1/2}}{2 (\psi_s \bar{\delta} \ln \sigma^2)^{1/2}} \quad (72)$$

Dado que, como se ve en la fig. 7, todas las curvas  $\eta = \text{constante}$  alcanzan el límite  $\eta = 0$  para valores de  $\mu$  claramente menores que  $\hat{\mu}_{1/2}$ , la Ec.(71) se puede escribir:

$$X_0^{\mu 0} + s X_1^{\mu 0} = 0.5 [X_0^{0\eta} + s X_1^{0\eta}] ; \quad (73)$$

La Ec.(73) sólo contiene las funciones dadas en las Ecs.(64) (65) y (66). Se puede obtener una aproximación útil y explícita para  $\hat{\theta}_{1/2}$ , despreciando la dependencia en  $s$  y aproximando  $X_0^{\mu 0}$  en la forma

$$X_0^{\mu 0} \approx (4/\pi) [\mu^2 + (4/\pi)^2 - 1]^{-1/2} \quad (74)$$

lo cual conduce a un error menor que el 3%; se tiene entonces

$$\hat{\theta}_{1/2} \approx 2 \left[ \frac{\psi_s \bar{\delta} \ln \sigma^2}{M^2 (\sigma^2 - 1)} \right]^{1/2} \left[ \left( \frac{8}{\pi X_0^{0\eta}} \right)^2 + 1 - \left( \frac{4}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (75)$$

La ecuación exacta, Ec.(73), se ha resuelto numéricamente para  $s=0$  y  $s=1/3$ , y  $\hat{\mu}_{1/2}(\eta)$  se ha representado gráficamente en la figura 9.

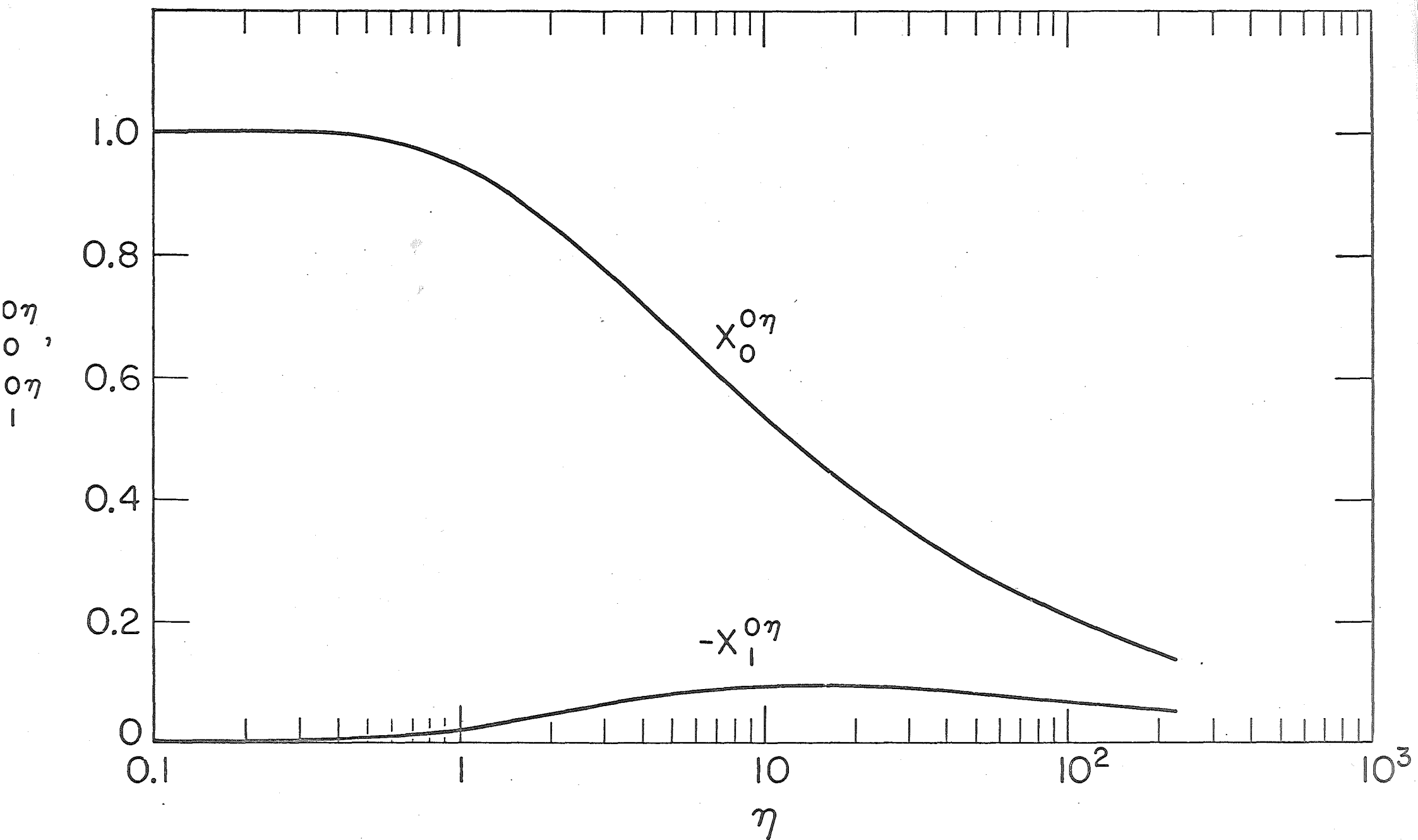


Fig.8 Funciones auxiliares  $X_0^{on}$  y  $X_1^{on}$  en función de la temperatura iónica normalizada  $\eta$ .

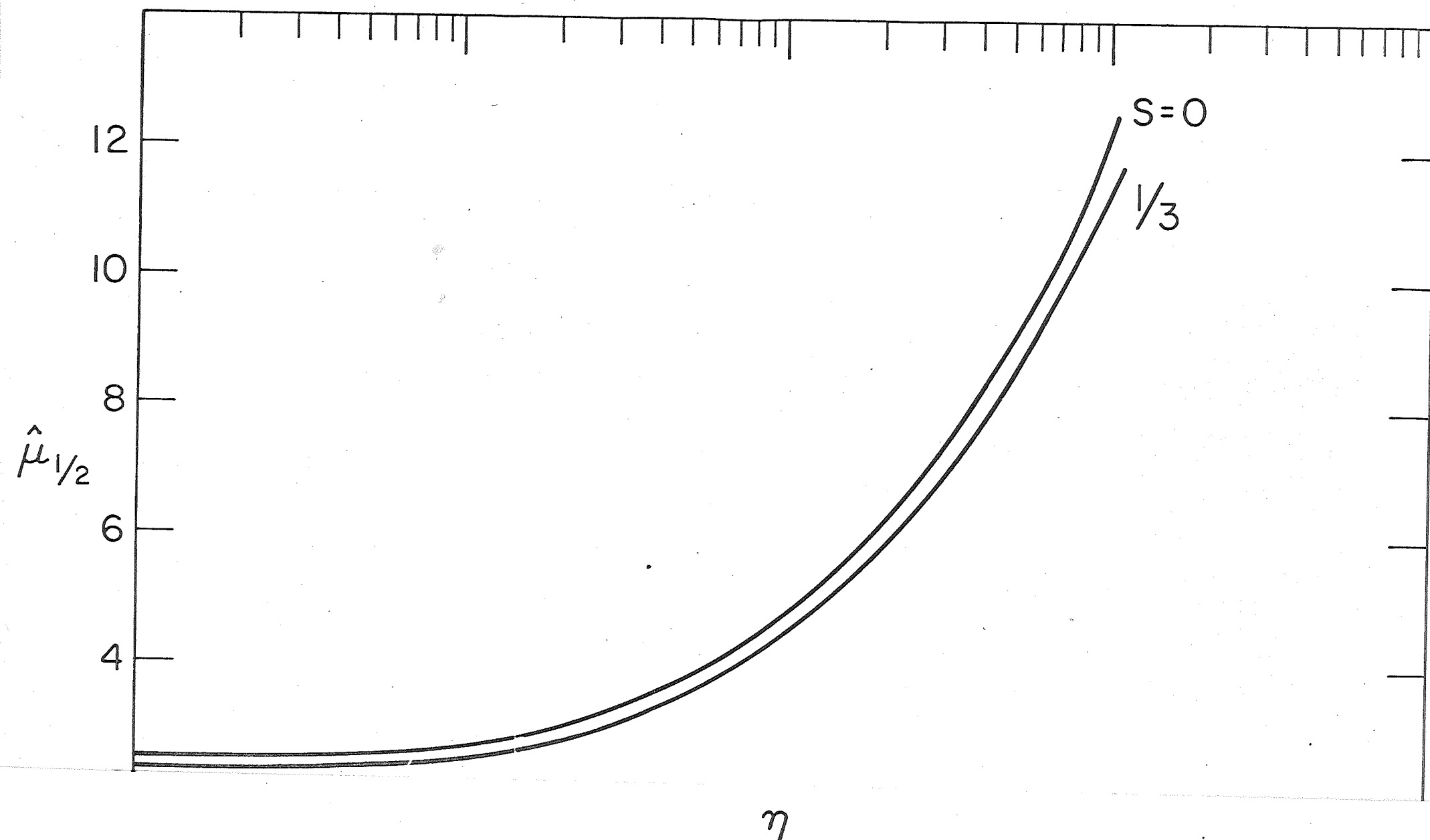


Fig.9 Semianchura angular (normalizada)  $\hat{\mu}_{1/2}$  del máximo de la corriente, en función de la temperatura iónica normalizada  $\eta$  y el parámetro  $s$ .



## VI.- COMPARACION CON RESULTADOS EXPERIMENTALES.

La fig. 10 presenta  $\bar{j}/j_{\omega}|_{\max}$  en función de  $\hat{l}/M$ , para un valor de  $\psi_s$  y varios valores de  $\epsilon$ , según la Ec.(70) y según los resultados experimentales discutidos en la Ref. [37]. Se dan curvas teóricas para  $\beta = 10^{-2}$  (líneas continuas) y  $\beta = 10^{-3}$  (líneas a trazos). En la Ref.[37] se estimó que en los experimentos  $\beta$  era del orden de  $10^{-2}$  ó menor, y se supuso por tanto que un análisis basado en la hipótesis de que  $T_i = 0$  sería adecuado. La teoría presente demuestra que la condición necesaria para que se pueda despreciar el movimiento térmico de los iones ( $T_i \approx 0$ ) no es  $\beta \ll 1$  sino  $\eta \ll 1$  (de hecho la condición es algo más débil: aproximadamente,  $\eta < 0.5$ ) como se observa claramente en la fig. 10. Si  $\beta = 10^{-2}$ , el acuerdo entre teoría y experimentos es excelente para  $\epsilon = 0.009$  y  $\epsilon = 0.041$ ; para  $\epsilon = 0.08$  los errores, aunque mayores, no pasan del 20% (excepto por un dato, que sin duda, está equivocado), que es el margen de error de la medida. Si  $\beta \approx 2 \times 10^{-2}$ , el acuerdo, en general, mejoraría mucho.

Los resultados experimentales de Hester y Sonin [37] indican que la corriente depende linealmente de  $\psi_s$ , lo que está de acuerdo con la teoría presente, ya que  $j_{\omega} \sim \psi_s^{1/2}$  y  $\bar{j}/j_{\omega} \sim \psi_s^{1/2}$ . La teoría de Bettinger y Chen [36] predice por el contrario que  $\bar{j} \sim \psi_s^{3/2}$ .

La fig. 11 presenta la semianchura (normalizada) del máximo en función de  $\hat{l}/M$  para las mismas condiciones de la fig. 10, según la teoría presente (líneas continuas,  $\beta = 10^{-2}$  y líneas a trazos  $\beta = 10^{-3}$ ) y según los resultados experimentales de la Ref. [37]. La semianchura  $\theta_{1/2}$  difiere de

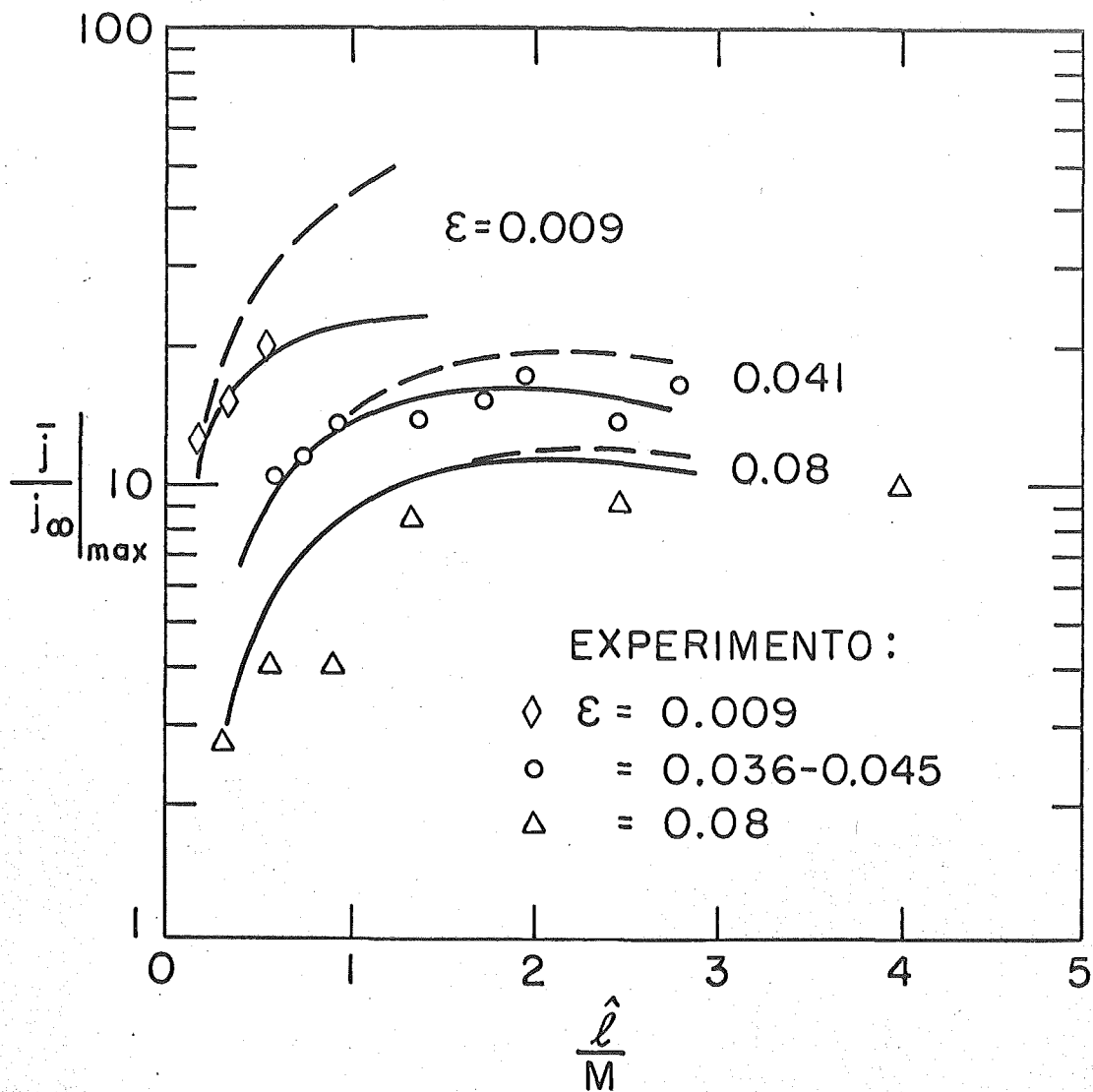


Fig.10 Densidad de corriente adimensional máxima,  $\left| \frac{\bar{j}}{j_\infty} \right|_{\max}$ , en función del radio,  $\varepsilon$ , y longitud,  $\hat{\ell}/M$ , (adimensionales) de la sonda, según experimentos; Ref. [37], y según la teoría presente (líneas continuas  $\beta = 10^{-2}$ , líneas a trazos  $\beta = 10^{-3}$ ) para  $\psi_s = 15$ .

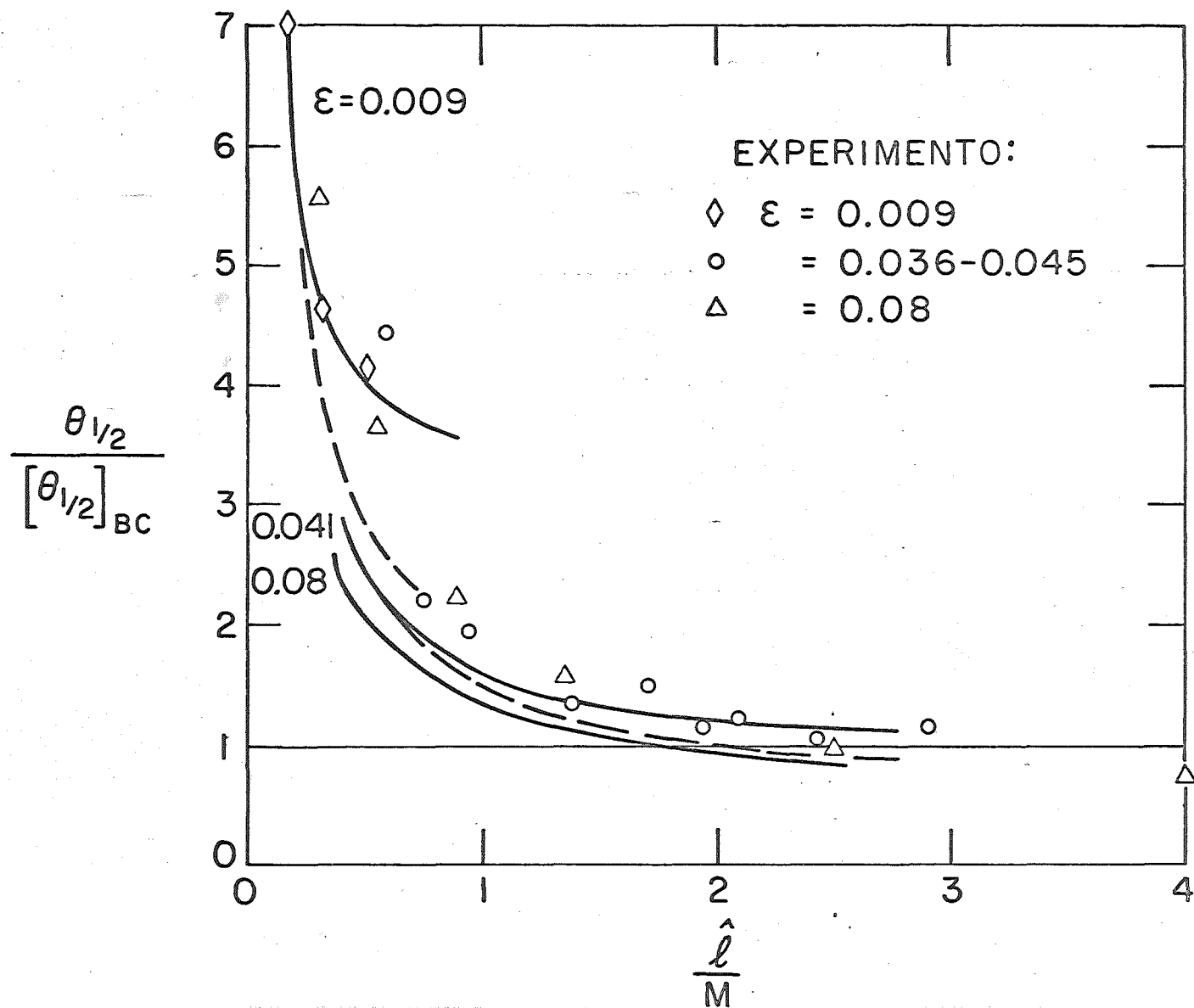


Fig.11 Semianchura angular normalizada,  $\theta_{1/2}/[\theta_{1/2}]_{BC}$ , del máximo de la corriente, como se define en la Ref [37], según experimentos, Ref. [37], y según la teoría presente, para las mismas condiciones de la Fig.10.

$\hat{\theta}_{1/2}$ , en que para su definición se resta previamente de la corriente la fracción de ésta que corresponde a una sonda infinita;  $[\theta_{1/2}]_{BC}$  es el valor de esa cantidad que obtienen Bettinger y Chen [36] para  $T_i \approx 0$ . El uso de  $\theta_{1/2}$  en vez de  $\hat{\theta}_{1/2}$  en la fig. 11 permite una comparación directa con los experimentos de la Ref. [37]. El acuerdo entre teoría y experimentos es, en general, bueno para  $\beta \approx 10^{-2}$ .

Los experimentos mostraron que  $\theta_{1/2}$  (y  $\hat{\theta}_{1/2}$ ) no depende de  $\Psi_s$ ; esto está de acuerdo con la teoría presente, como se verifica fácilmente en la Ec. (75). El análisis de la Ref. [36] predice, por el contrario, que  $\theta_{1/2} \sim \Psi_s^{-1/4}$ . Nótese también que para  $T_i \approx 0$ , la teoría presente predice que  $\theta_{1/2}$  depende linealmente de  $\varepsilon$ ; esto explicaría la conclusión alcanzada en la Ref. [37], estableciendo que, para  $T_i \approx 0$ , los datos experimentales acerca de la cantidad  $\theta_{1/2}/[\theta_{1/2}]_{BC}$  coinciden en una curva única (universal). Obsérvese, sin embargo, que para muchos de los puntos experimentales de la Fig. 11, (los mismos que se discuten en la Ref. [37]) los iones no pueden ser considerados fríos ( $\eta > 0.5$ ).

Por otra parte ni siquiera para  $T_i \approx 0$  puede existir una curva universal, excepto para  $\hat{l}/M$  pequeño, pues  $\theta_{1/2}$  no es una función exactamente lineal de  $\varepsilon$  (depende también de  $\ln \varepsilon$ ).

Resultados experimentales recientes, obtenidos en el Fluid Mechanics Laboratory del Instituto Tecnológico de Massachusetts [40], parecen confirmar la completa validez cuantitativa del análisis llevado a cabo en esta tesis. Para una confirmación adicional indirecta, véase el Apéndice C.

## VII.- CONCLUSIONES.

El presente análisis trata de un importante fenómeno en la respuesta de corriente de una sonda cilíndrica de - Langmuir que se mueve en un plasma rarificado. Para una sonda infinitamente larga la teoría clásica predice que cuando el ángulo  $\theta$  entre el eje de la sonda y la dirección del movimiento disminuye, la corriente experimenta un suave decrecimiento; se ha observado, sin embargo, que para una sonda fi-  
nita la corriente puede mostrar un comportamiento claramente opuesto, en la forma de un agudo máximo de la corriente para  $\theta$  pequeño. El máximo, que puede ser grande aun para sondas - muy largas, aparece cuando el potencial es fuertemente negativo y tanto el número de Mach basado en la velocidad ionoa-  
cústica,  $M$ , como la razón de la longitud de Debye al radio - de la sonda,  $\xi^{-1}$ , son grandes.

Los únicos análisis de este efecto de extremo llevados a cabo hasta el momento son una teoría muy simplificada del régimen  $\hat{l} > 3M$  (donde  $\hat{l}$  es la razón de la longitud de la sonda al radio de Debye) y algunos cálculos numéricos del régimen  $\hat{l} < 3M$ , para  $\theta = 0$ . En este trabajo se estudia rigurosamente el caso  $1 \leq 3M$ , para  $\theta$  arbitrario dentro del intervalo angular donde se presenta el máximo; se supone que la fun-  
ción de distribución de los iones es Maxwelliana. Se llega a la conclusión de que si  $\bar{j}$  es la densidad de corriente media en la superficie de la sonda, y  $j_{\infty} \equiv \bar{j} (\hat{l} \rightarrow \infty)$  [dada en la -  
Ec.(7)], entonces  $\bar{j}/j_{\infty}$  se puede escribir de la forma:

$$\bar{j}/j_{\infty} = \bar{j}/j_{\infty} (\hat{l}/M, \epsilon, \beta, \psi_s, M\theta) \quad (76)$$

donde  $\beta$  es la razón de temperaturas y  $\psi_s = -e V_s / k_B T_e$  ( $V_s$  es el potencial de la sonda y  $T_e$  es la temperatura electrónica). Específicamente se encuentra que

$$\left[ (8 \psi_s)^{1/2} \hat{1} / \pi \epsilon_M \sigma^2 \right] \bar{j} / j_\omega = X(\mu, \eta, s) \quad (77)$$

donde  $\bar{\delta}, \sigma, \mu, \eta$  y  $s$  se definen en las Ecs. (17), (55), (59) y (61). La función  $Y(\epsilon, \psi_s)$  en la Ec. (17) está dada en la figura 5.

En las Ecs. (61)-(63) se da una representación integral de la función  $X$ . Puesto que  $X$  es lineal en  $s$ , un diagrama único cubre todas las condiciones posibles; ese diagrama aparece en la fig. 7 y da la familia de curvas  $X(\mu)$  con parámetro  $\eta$ , para dos valores de  $s$ . Dado que  $X \sim \bar{j} / j_\omega$  y  $\mu \sim \theta$ , dicha figura representa la estructura del máximo. Las Ecs. (70), (73), y (64)-(66) dan fórmulas explícitas para la altura y semianchura del máximo, que también se pueden obtener gráficamente de las figuras 8 y 9. Todas las predicciones de la teoría concuerdan bien con los datos experimentales (fig. 10 y 11, Ref. [40] y Apéndice C).

El efecto de extremo puede ser aprovechado para la "diagnosis" de los plasmas. La primera observación que conviene hacer es que la temperatura electrónica no influye en el máximo:  $\bar{j} / j_\omega$  depende de  $T_e$  solo a través de  $\bar{\delta}$ ; esta dependencia es muy débil ya que la variación logarítmica en el término  $\ln \epsilon^{-1}$  es cancelada casi totalmente por el término  $Y$ . Dado que  $j_\omega$  tampoco depende de  $T_e$ , se han de usar otros aspectos de la respuesta de corriente de una sonda (usualmente la pendiente del logaritmo de la corriente electrónica para

potenciales  $V_s$  ligeramente negativos) para la determinación de  $T_e$ .

Aparte de parámetros no relacionados con el estado del plasma ( $U, l, r_s$ ) y de una dependencia funcional débil -- (logarítmica) a través de  $\bar{\delta}$  y de  $\ln \sigma$ , la altura y semi-anchura del máximo de la corriente vienen dados por expresiones de la forma:

$$I_{s_{\max}} \sim -V_s F_1(N_0 Z_i/m_i, K_B T_i/m_i), \quad (78)$$

$$\hat{\theta}_{1/2} \sim F_2(N_0 Z_i/m_i, K_B T_i/m_i) \quad (79)$$

donde  $F_1$  y  $F_2$  son funciones conocidas,  $N_0$  es la densidad del plasma, y  $Z_i$ ,  $m_i$  y  $T_i$  son el número de carga, la masa y la temperatura de los iones. Puesto que

$$I_s(\theta = \pi/2) \approx I_{s\omega}(\theta = \pi/2) \sim N_0 (1 - 2 Z_i e V_s / m_i U^2)^{1/2} \quad (80)$$

$$I_{s\omega}(\theta = \pi/2) / I_{s\omega}(\theta = 0) = (1 - m_i U^2 / 2 Z_i e V_s)^{1/2} \quad (81)$$

es posible determinar  $N_0$ ,  $V_s$ ,  $m_i/Z_i$  y  $T_i/Z_i$  de los datos experimentales para  $I_s(\theta)$ . El valor  $I_{s\omega}(\theta = 0)$  debe ser extrapolado de datos experimentales para  $\theta$  moderadamente pequeño; si esa extrapolación no es lo suficientemente aproximada, se pierde una ecuación [la Ec.(81)] y se necesita algún dato adicional para la determinación de  $N_0$ ,  $V_s$ ,  $m_i/Z_i$  y  $T_i/Z_i$ . Por otra parte, para  $T_i \approx 0$ , (digamos  $\eta < 0.5$ ), se tiene  $X \approx X(\eta = 0)$  y desaparece una de las incógnitas (no se puede determinar  $T_i$ ).

Finalmente recordamos que a las ya mencionadas condiciones (sobre  $\varepsilon$ ,  $\psi_s$ , etc.) que se han de presentar para la

existencia del efecto de extremo, se han de añadir otras con  
diciones, impuestas por ciertas simplificaciones en el análi  
sis:

$$1 \ll \hat{1} \leq 3M$$

$$2\beta/\delta \ll \psi_s < M^2, \quad \psi_s < \hat{1}^2.$$

El estudio que se lleva a cabo en esta tesis aparece  
rá próximamente en la literatura. [41] .



BIBLIOGRAFIA

- 1 J.D. SWIFT y M.J.R.SCHWAR: "Electrical Probes for Plasma Diagnostics", (Iliffe Books Ltd., Londres, 1970), Cap. 1.
- 2 F.F.CHEN, en "Plasma Diagnostic Techniques", editado por R.H.Huddleston y S.L.Leonard, (Academic Press, Nueva York, 1965), Cap. 4.
- 3 I.LANGMUIR, en "Collected Works of Irving Langmuir", editado por C.G.Suits, (Pergamon Press Inc., Nueva York, 1961), vols. 3, 4 y 5.
- 4 L.SPITZER Jr.: "Physics of Fully Ionized Gases", (Interscience Publishers Inc., Nueva York, 1956), Cap. 2.
- 5 C.H.SU y S.H.LAM.: "Continuum theory of spherical electrostatic probes", The Physics of Fluids 6, 1479 (1963).
- 6 I.M.COHEN: "Asymptotic theory of spherical electrostatic probes in a slightly ionized, collision-dominated gas", The Physics of Fluids 6, 1492 (1963).
- 7 K.TOBA y S.SAYANO: "A continuum theory of electrostatic probes in a slightly ionized gas", Journal of Plasma Physics 1, 407 (1967).
- 8 P.M.CHUNG: "Electrical characteristics of Couette and stagnation boundary-layer flows of weakly ionized

- gases", The Physics of Fluids 7, 110 (1964).
- 9 C.H.SU: "Compressible plasma flow over a biased body", AIAA Journal 3, 842 (1965).
  - 10 S.H.LAM: "A general theory for the flow of weakly ionized gases", AIAA Journal 2, 256 (1964).
  - 11 E.WASSERSTROM, C.H.SU y R.F.PROBSTEIN: "Kinetic theory approach to electrostatic probes", The Physics of Fluids 8, 56 (1965).
  - 12 Y.S.CHOU, L.TALBOT y D.R.WILLIS: "Kinetic theory of a spherical electrostatic probe in a stationary plasma", The Physics of Fluids 9, 2150 (1966).
  - 13 C.H.SU: "Kinetic theory of a highly negative Langmuir probe", en "A Survey of Phenomena in Ionized Gases" (International Atomic Energy Agency, Viena, 1968), pág. 569.
  - 14 G.K.BIENKOWSKI y K.W.CHANG: "Asymptotic theory of a spherical electrostatic probe in a stationary weakly ionized plasma", The Physics of Fluids 11, 784 (1968).
  - 15 D.BOHM, en "The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic fields", editado por A.Guthrie y R.K. Wakerling (McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1949), Cap. 3 .
  - 16 B.BERTOTTI: "Theory of an electrostatic probe in a strong magnetic field", The Physics of Fluids 4, 1047 (1961).

- 17 B.BERTOTTI: "Theory of an electrostatic probe in a strong magnetic field, II", The Physics of Fluids 5, 1010 (1962).
- 18 M.SUGAWARA: "Electron probe current in a magnetized plasma", The Physics of Fluids 9, 797 (1966).
- 19 J.R.SANMARTIN: Tesis Doctoral, University of Colorado (Boulder, Colorado, EE.UU.), 1967.
- 20 I.M.COHEN: "Saturation currents to Langmuir probes in a collision-dominated plasma with uniform magnetic field", The Physics of Fluids 12, 2356 (1969).
- 21 J.R.SANMARTIN: "Theory of a probe in a strong magnetic field", The Physics of Fluids 13, 103 (1970).
- 22 I.G.BROWN, A.B.COMPHER y W.B.KUNKEL: "Response of a Langmuir probe in a strong magnetic field", The Physics of Fluids 14, 1377 (1971).
- 23 D.BOHM, E.H.S.BURHOP y H.S.W.MASSEY, en "The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields", editado por A.Guthrie y R.K.Wakerling (McGraw-Hill Book Co., Nueva York, 1949), Cap. 2.
- 24 J.E.ALLEN, R.L.F.BOYD y P.REYNOLDS: "The collection of positive ions by a probe immersed in a plasma", - Proc. Phys. Soc. 70, 297 (1957).
- 25 I.BERNSTEIN e I.RABINOWITZ: "Theory of electrostatic probes in a low-density plasma", The Physics of Fluids 2, 112 (1959).

- 26 S.H.LAM: "Unified theory for the Langmuir probe in a collisionless plasma", The Physics of Fluids 8, 73 (1965).
- 27 F.F.CHEN: "Numerical computations for ion probe characteristics in a collisionless plasma", Journal of Nuclear Energy, C 7, 47 (1965).
- 28 L.S.HALL y R.P.FREIS: "Theory of the electrostatic probe and its improved use as a diagnostic tool", en - Proceedings of the Seventh International Conference on Phenomena in Ionized Gases (Beograd, 1966), vol. III.
- 29 R.E.KIEL y W.A.GUSTAFSON: "Electrostatic probe in a collisionless plasma", The Physics of Fluids 9, 1531 (1966).
- 30 J.G.LAFRAMBOISE: "Theory of spherical and cylindrical Langmuir probes in a collisionless, Maxwellian plasma at rest", University of Toronto Institute for Aerospace Studies Report No. 100 (1966).
- 31 A.H.DAVIS e I.HARRIS: "Interaction of a charged satellite with the ionosphere", en "Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Symposium on Rarefied Gas Dynamics", editado por L.Talbot (Academic Press Inc., Nueva York, 1961).
- 32 M.KANAL: "Theory of current collection on moving cylindrical probes", Journal of Applied Physics 35, 1697 (1964).

- 33 S.H.LAM y M.GREENBLATT: "On the interaction of a solid body with a flowing collisionless plasma", en "Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Symposium on Rarefied Gas Dynamics", editado por J.H. de Leeuw (Academic Press Inc., Nueva York, 1965), vol. 2.
- 34 S.D.HESTER y A.A.SONIN: "Some results from a laboratory study of satellite wake structure and probe response in collisionless plasma flows", en "Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Symposium on Rarefied Gas Dynamics", (Academic Press Inc., Nueva York, 1969) vol. 2.
- 35 S.LEDERMAN, M.H.BLOOM y G.F.WIDHOPF: "Experiments on cylindrical electrostatic probes in a slightly ionized hypersonic flow", AIAA Journal 6, 2133 (1968).
- 36 R.T.BETTINGER y A.A.CHEN: "An end effect associated with cylindrical Langmuir probes moving at satellite velocities", Journal of Geophysical Research 73, 2513 (1968).
- 37 S.D.HESTER y A.A.SONIN: "Ion temperature sensitive end effect in cylindrical Langmuir probe response at ionosphere satellite conditions", The Physics of Fluids 13, 1265 (1970).
- 38 J.R.SANMARTIN: "The determination of ionospheric charged particle temperatures from in situ measurements", a presentar al 15<sup>th</sup> Annual Meeting of COSPAR (Madrid, Mayo 1972).

- 39 J.R.SANMARTIN: "Ion-temperature-sensitive effect in transient Langmuir probe response", The Physics of Fluids 15, 391 (1972).
- 40 C.PARAZZOLI, comunicación privada.
- 41 J.R.SANMARTIN: "End effect in Langmuir probe response under ionospheric satellite conditions", The Physics of Fluids 15, (Mayo 1972).

# Apéndice A

## DETERMINACION APROXIMADA DEL CAMPO POTENCIAL EN EL

### PROBLEMA SIMILAR NO ESTACIONARIO

En la Sec. III las funciones  $\delta(t)$  y  $\langle v(\rho, t) \rangle$  de la Ec.(15), fueron sustituidas por las constantes  $\bar{\delta}$  y  $\bar{v}$ . En este apéndice se obtienen cotas superiores e inferiores de  $\langle v \rangle$  (en el intervalo  $1 \leq \rho \leq \rho_m$ ) y  $\delta$ ; esto permite determinar dichas constantes, así como los errores de las aproximaciones,  $\delta = \bar{\delta}$  y  $\langle v \rangle = \bar{v}$ . Tales errores, muy pequeños, se discuten aquí y en el Apéndice C.

Para acotar las funciones  $\delta$  y  $v$  conviene establecer el siguiente lema: Sean  $\psi_K(\rho)$  ( $K=1,2$ ) funciones definidas por las ecuaciones

$$\rho^{-1} \partial/\partial \rho (\rho \partial \psi_K / \partial \rho) = \varepsilon^2 F_K [\psi_K(\rho), \rho] \quad \rho \geq 1 \quad (A-1)$$

$$\psi_K(1) = \psi_s, \quad \psi_K(\infty) = 0, \quad (A-2)$$

donde  $F_K[f, \rho]$  es acotada en el dominio  $\rho \geq 1$ ,  $\psi_s \geq f \geq 0$ , compatible con la Ec.(A-2), y tal que  $\psi_K$  decrece monotónicamente de  $\psi_s$  a cero. Sea también  $F_2[f, \rho] \geq F_1[f, \rho]$  en el anterior dominio, y  $F_1[f, \rho]$  una función no decreciente de  $f$ . Si se escribe  $\partial \psi_K / \partial \rho \big|_{\rho=1} \equiv -\psi_s \delta_K$ , se tiene entonces

$$\delta_2 \geq \delta_1. \quad (A-3)$$

Para probar (A-3), supóngase que, por el contrario,  $\delta_2 < \delta_1$ . Integrando (A-1) dos veces, se obtiene:

$$\Psi_K(\rho) = \Psi_S(1 - \delta_K \ln \rho) + \varepsilon^2 \int_1^\rho \rho' d\rho' F_K[\Psi_K(\rho'), \rho'] \ln(\rho/\rho'). \quad (A-4)$$

Es evidente que en un cierto intervalo,  $1 < \rho < \rho_a$ , se tiene  $\Psi_2(\rho) > \Psi_1(\rho)$ , donde  $\rho_a$  es tal que  $\Psi_2(\rho_a) = \Psi_1(\rho_a)$  [ $\rho_a$  existe, sea finito o infinito, puesto que  $\Psi_2(\infty) = \Psi_1(\infty)$ ]. De esto se deduce que

$$\begin{aligned} 0 = \Psi_2(\rho_a) - \Psi_1(\rho_a) &= \Psi_S(\delta_1 - \delta_2) \ln \rho_a + \varepsilon^2 \int_1^{\rho_a} \rho' d\rho' \ln(\rho_a/\rho') \\ &\times \left\{ F_2[\Psi_2(\rho'), \rho'] - F_1[\Psi_1(\rho'), \rho'] \right\} \geq \Psi_S(\delta_1 - \delta_2) \ln \rho_a \\ &+ \varepsilon^2 \int_1^{\rho_a} \rho' d\rho' \ln(\rho_a/\rho') \left\{ F_1[\Psi_1(\rho'), \rho'] - F_1[\Psi_2(\rho'), \rho'] \right\} > 0, \end{aligned} \quad (A-5)$$

lo que demuestra que  $\delta_2$  no puede ser menor que  $\delta_1$ .

Considérese ahora un tiempo  $t > 0$ , grande comparado con un ciclo de la frecuencia electrónica pero pequeño en la escala de la frecuencia iónica  $[\omega_{pi}^{-1} \gg t \gg \omega_{pi}^{-1}(m_e/m_i)^{1/2}]$ ; se indicará esto escribiendo  $\tau \equiv \omega_{pi} t \approx 0$ . Es evidente que la Ec.(2) será ya válida y, por otra parte, los iones no habrán respondido todavía al campo potencial repentinamente establecido. Se tendrá entonces (véase el apéndice E de la Ref.[30])

$$\nu(\tau \approx 0) = 1 - \pi^{-1} \sin^{-1} \rho^{-1} - \exp(-\Psi) \quad (A-6)$$

Haciendo  $F_1 = \nu(\tau \approx 0)$ ,  $\Psi_1 = \Psi(\tau \approx 0)$ , y  $F_2 = F_2^{(1)}$ ,  $\Psi_2 = \Psi_2^{(1)}$ , donde

$$\begin{aligned} F_2^{(1)}[\Psi_2^{(1)}(\rho), \rho] &= 1 - \pi^{-1} \sin^{-1} \rho^{-1} - \exp(-\Psi_S), \quad \Psi_2^{(1)} \geq 1 - \exp(-\Psi_S) \\ &= \Psi_2^{(1)} - \pi^{-1} \sin^{-1} \rho^{-1}, \quad \Psi_2^{(1)} \leq 1 - \exp(-\Psi_S) \end{aligned} \quad (A-7)$$



se cumplirán las condiciones del lema anterior y por tanto - se tendrá  $\delta(\tau \approx 0) \leq \delta_2^{(1)}$ . De un modo similar, haciendo  $F_2 = v(\tau \approx 0)$ ,  $\psi_2 = \psi(\tau \approx 0)$ , y  $F_1 = F_1^{(2)}$ ,  $\psi_1 = \psi_1^{(2)}$ , donde

$$F_1^{(2)}[\psi_1^{(2)}(\rho), \rho] = 1 - \pi^{-1} \text{sen}^{-1} \rho^{-1} - \exp(-p), \quad \psi_1^{(2)} \geq p \quad (A-8)$$

$$= [1 - \exp(-p)] \psi_1^{(2)} / p - \pi^{-1} \text{sen}^{-1} \rho^{-1}, \quad \psi_1^{(2)} \leq p$$

y  $p \equiv 1 - \exp(-\psi_s)$ , se tendrá  $\delta(\tau \approx 0) \geq \delta_1^{(2)}$ . Dado que  $F_2^{(1)}$  y  $F_1^{(2)}$  son lineales en  $\psi_2^{(1)}$  y  $\psi_1^{(2)}$  respectivamente, es fácil calcular  $\delta_2^{(1)}$  y  $\delta_1^{(2)}$ , y con ello acotar  $\delta(\tau \approx 0)$ .

Si ahora se considera el límite  $t$  ( $\delta \tau$ )  $\rightarrow \infty$ , se tiene (véase de nuevo el apéndice citado de la Ref. [30])

$$v(\tau \rightarrow \infty) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dx \exp(-x) \text{sen}^{-1} \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\psi_s + \beta x}{\psi + \beta x} \right)^{1/2} \right] - \exp(-\psi). \quad (A-9)$$

Es evidente que  $\delta(\tau \rightarrow \infty) \leq (\tau \approx 0)$  ya que  $\partial v(\tau \rightarrow \infty) / \partial \psi > 0$  y el segundo término de  $v(\tau \rightarrow \infty)$  es mayor o igual que  $\pi^{-1} \text{sen}^{-1} \rho^{-1}$  para  $0 \leq \psi \leq \psi_s$ ; por tanto  $\delta(\tau \rightarrow \infty) \leq \delta_2^{(1)}$ . Es posible también encontrar una cota inferior de  $\delta(\tau \rightarrow \infty)$ ,  $\delta_1^{(3)}$  (véase la Ref. [39]).

Para  $\tau$  arbitrario no es posible obtener una acotación directa de  $\delta(\tau)$ , pues no se tiene una expresión explícita de  $v$  más que en los límites  $\tau \approx 0$  y  $\tau \rightarrow \infty$ . Sin embargo, el cálculo de  $\delta_2^{(1)}$ ,  $\delta_1^{(2)}$  y  $\delta_1^{(3)}$  muestra que estas cantidades son todas muy próximas entre sí, por lo que  $\delta(\tau \approx 0) \approx \delta(\tau \rightarrow \infty)$ ; esto induce a pensar que  $\delta(\tau)$  es aproximadamente constante para  $\tau$  arbitrario. Para confirmar esto, obsérvese que las Ecs. (A-6) y (A-9) muestran que la densidad ióni

ca en torno a la sonda,  $N_i$ , decrece entre  $\tau = 0$  y  $\tau \rightarrow \infty$ . Supóngase que este decrecimiento es monotónico en el tiempo; es obvio entonces que  $\delta(\tau \approx 0) \geq \delta(\tau) \geq \delta(\tau \rightarrow \infty)$  ya que  $\delta$  disminuye cuando disminuye  $N_i$ . Para obtener la desigualdad anterior, la condición de monotonía de  $N_i$  es suficiente pero no necesaria; se llega al mismo resultado con la condición más débil  $N_i(\tau \approx 0) \geq N_i(\tau) \geq N_i(\tau \rightarrow \infty)$ . De hecho, como  $\delta$  sólo depende de  $\nu$  de un modo global<sup>\*</sup>, es evidente que incluso se podría violar esta última condición sin invalidar la desigualdad anterior acerca de  $\delta(\tau)$ <sup>\*\*</sup>.

Si se definen  $\bar{\delta}^{-1} = (2 \delta_2^{(1)})^{-1} + (2 \delta_1^{(3)})^{-1}$ ,  $Y = \bar{\delta}^{-1} - \ln \varepsilon^{-1}$ , y se calculan  $\delta_2^{(1)}$  y  $\delta_1^{(3)}$  se obtiene la fig. 5 para  $Y(\varepsilon, \psi_s)$ . El error en la aproximación  $\delta(\tau) = \bar{\delta}$  decrece para  $\varepsilon$  y  $\psi_s^{-1}$  decreciente: para  $\varepsilon = \psi_s^{-1} = 10^{-1}$ , el error es menor que el 5%; para  $\varepsilon = 10^{-2}$  y  $\psi_s^{-1} \leq 10^{-1}$ , es menor que el 1%. Esta estimación es claramente pesimista pues: (a) se tomó la cota inferior de  $\delta(\tau \rightarrow \infty)$  como cota inferior de  $\delta(\tau)$ , aun cuando solo interesa el intervalo  $\tau \lesssim \tau_m$ ; (b) no interesa  $\delta(\tau)$  por sí mismo, sino solo en el cálculo de ciertas integrales.

En lo que se refiere a la aproximación  $\langle \nu \rangle = \bar{\nu}$ , - considérese de nuevo el caso  $\tau \approx 0$ . De la Ec.(A-6) se sigue que  $\nu(\rho = 1) \approx 1/2$ , y que a medida que  $\rho$  crece,  $\nu$  se aproxima rápidamente a la unidad y permanece aproximadamente igual a ésta hasta que la densidad electrónica se hace apreciable.

---

\* Se obtiene fácilmente que  $\delta = \varepsilon^2 \psi_s^{-1} \int_0^\infty \rho d\rho \nu$ .

\*\* La hipótesis  $\partial N_i / \partial \tau < 0$  parece bien justificada ya que  $j(\tau) > j(\infty)$  para  $\tau$  mayor que  $\tau \approx 0$ .

Dado que la carga espacial ( $\nu$ ) no afecta al campo potencial próximo a la sonda, es evidente que en una cierta región -- (grande) en torno a la sonda,  $\langle \nu \rangle$  puede ser aproximada por -- una constante algo menor que la unidad.

Se puede obtener el límite de esta región haciendo  $\delta(\tau) = \bar{\delta}$  en la Ec.(15) e introduciendo  $\rho_m = (2 \psi_s \bar{\delta})^{1/2} \varepsilon^{-1}$ . Dado que  $\rho_m^2 \gg 1$  y que  $\partial \psi / \partial \rho$  debe ser negativo, se ha de tener  $\langle \nu \rangle < \rho_m^2 / \rho^2$ , por lo que  $\langle \nu \rangle$  decrece rápidamente para  $\rho > \rho_m$ . Utilizando las funciones  $\psi_2^{(1)}$  y  $\psi_1^{(2)}$  citadas anteriormente como aproximaciones para  $\psi(\tau \approx 0)$ , se obtiene que  $\langle \nu \rangle > 0.60$  para  $\rho = \rho_m$ . Así pues  $0.60 < \langle \nu \rangle < 1$  para  $1 \leq \rho \leq \rho_m$  ( $\rho$  puede ser algo mayor que  $\rho_m$ ). Un análisis parecido para  $\tau \rightarrow \infty$ , conduce al mismo resultado. Mediante consideraciones semejantes a las empleadas en el análisis de  $\delta(\tau)$ ,  $\tau$  arbitrario, -- se deduce de lo anterior que  $0.60 < \langle \nu \rangle < 1$  para  $\tau$  arbitrario y  $\rho \leq \rho_m$ . Se puede escoger una constante  $\bar{\nu} = 0.80$  y escribir  $\langle \nu \rangle = \bar{\nu}$ . El error absoluto de esta aproximación es menor que 0.20, pero esta es una estimación pesimista por las mismas -- razones citadas en la discusión del error de  $\delta(\tau) = \bar{\delta}$ ; típicamente, se tendrá un error absoluto menor que 0.1, en  $\langle \nu \rangle = \bar{\nu}$ .

## Apéndice B

### VALIDEZ DE LA SIMILARIDAD DE HESTER Y SONIN

Cuando la sonda no está exactamente alineada en la dirección del movimiento, la densidad iónica no posee simetría central, debido a la presencia de la velocidad de deriva,  $U \sin \theta$ . En la Sec. IV se supuso que esta asimetría no tenía influencia apreciable sobre la corriente iónica a la sonda. La asimetría aparece dos veces en la ecuación para el movimiento radial de un ión

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 \rho}{dz^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\varepsilon^2}{\rho^3} \left[ \lambda_0 + \varepsilon^{-2} \int_0^z \frac{\partial \psi}{\partial \phi} dz' \right]^2 \quad (B-1)$$

donde  $\lambda_0$  es el momento de la cantidad de movimiento (adimensional) en el instante  $\tau \equiv \omega_{pi} t = 0$  (cuando el ión atraviesa el plano  $z = 0$ ) y el segundo término en el paréntesis representa el cambio en el momento de la cantidad de movimiento debido al campo azimutal  $\partial \psi / \partial \phi$ . Cuando  $\theta = 0$  se tiene  $\partial \psi / \partial \phi = 0$  y es posible determinar la región  $A^*$  y encontrar la función  $\hat{a}^*(z)$  usando la Ec.(18) en (19). Si  $\theta \neq 0$  se tiene, sin embargo, que  $\partial \psi / \partial \phi \neq 0$  y por tanto: (a)  $\partial \psi / \partial \rho$  depende de  $\phi$  a causa de la presencia del término  $\partial^2 \psi / \partial \phi^2$  en la ecuación de Poisson; (b) el segundo término en el paréntesis de la Ec.(B-1) es diferente de cero.

La densidad adimensional de carga se puede escribir en la forma:

$$v(\rho, \xi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \xi, \varphi') d\varphi' + \left\{ v - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \xi, \varphi') d\varphi' \right\} \\ \equiv v_0(\rho, \xi) + v_1(\rho, \xi, \varphi). \quad (B-2)$$

Como la ecuación de Poisson es lineal en  $v$  y  $\psi$ , y las condiciones de contorno para dicha ecuación no dependen de  $\varphi$ , se puede escribir  $\psi = \psi_0(\rho, \xi) + \psi_1(\rho, \xi, \varphi)$ , donde solo  $\psi_1$  depende de  $v_1$ . Si se escoge una expresión modelo, sencilla, para  $v_1$  se puede calcular  $\psi_1$ , y estimar la importancia de la asimetría del campo potencial en el movimiento de los iones. La expresión modelo debe satisfacer, desde luego, todas las condiciones que se sabe satisface  $v_1$ .

Es evidente que  $v_1(\xi = 0) = 0$  si, en verdad, iones y electrones no son afectados por el campo potencial hasta alcanzar el plano  $\xi = 0$  ( $z = 0$ ). (Véase el final de este apéndice).

En su viaje a lo largo de la sonda la función de distribución de los iones se reajusta, y alcanza la forma límite correspondiente a una sonda infinitamente larga,  $v_{1\infty}(\rho, \varphi)$ , si  $l$  es suficientemente grande; una cota mínima del valor de  $l$  necesario para alcanzar aproximadamente dicha forma límite, es la longitud correspondiente a un ciclo de la frecuencia iónica del plasma, esto es  $l = 2\pi M \lambda_D$  (Apéndice C). Suponiendo que la variación de  $v_1$  con  $\xi$  es lineal, se tiene (para  $\hat{l} < 2\pi M$ ):

$$v_1(\rho, \xi, \varphi) = \frac{\xi}{2\pi M \lambda_D} v_{1\infty}(\rho, \varphi) = \xi \frac{\hat{l} v_{1\infty}}{2\pi M}. \quad (B-3)$$

La función  $v_{1\omega}(\rho, \varphi)$  se puede escribir como

$$v_{1\omega} = b_1(\rho) \cos \varphi + b_2(\rho) \cos 2\varphi + \dots, \quad (B-4)$$

y para una estimación aproximada se puede retener sólo el primer término de (B-4). Finalmente se puede aproximar  $b_1(\rho)$  en la forma\*

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 & \rho < \rho_m \\ b_1 &= 0 & \rho > \rho_m \end{aligned} \quad (B-5)$$

con lo que finalmente se tiene la expresión modelo

$$v_1(\rho, \xi, \varphi) = \frac{\hat{1}}{2\pi M} \xi \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \varphi, \quad \begin{Bmatrix} \rho < \rho_m \\ \rho > \rho_m \end{Bmatrix}. \quad (B-6)$$

Se puede entonces calcular  $\psi_1$  exactamente, y determinar su importancia en la Ec. (B-1). Usando la condición  $\hat{1} \lesssim 3M$ , se llega a la conclusión de que  $v_1$  no afecta a los resultados en más de un 10%. Teniendo en cuenta las aproximaciones pesimistas introducidas, parece justificado el despreciar la asimetría del campo potencial en el cálculo de la corriente (Sec. IV).

Tanto la discusión anterior como el análisis de las Secs. II y III, descansan sobre una hipótesis fundamental. -- Esta hipótesis es que la función de distribución iónica en el plano  $z=0$  es igual a la función de distribución aguas --

---

\* Esta aproximación parece claramente pesimista (esto es, exagera la importancia de  $v_1$ ), porque en el intervalo angular de interés, se tiene  $\alpha_T < 1$ , esto es,  $M^2 \theta^2 / 2 \psi_s < \delta/2 \ll 1$ .

arriba de la sonda. Obviamente esto es solo una aproximación, pues el campo potencial delante de la punta de la sonda debe afectar de algún modo a los iones que alcanzan el plano  $z = 0$ . Se puede estimar la importancia de este efecto, empleando una aproximación adecuada para el potencial  $\Psi$  en dicha región. Dado que  $\varepsilon \ll 1$  y que  $\Psi$  debe tener simetría esférica (aproximadamente) en las cercanías del frente de la sonda, se puede poner:

$$\Psi(z < 0) \approx \Psi_s / \rho . \quad (\text{B-7})$$

En estas condiciones, se puede determinar exactamente el movimiento de los iones para  $z < 0$  y se obtiene, por ejemplo, - que

$$\frac{Z_i N_i}{N_0} (z = 0) = 1 \pm \frac{W^2}{1 \pm 2W} \quad (\text{B-8})$$

donde

$$2W = (1 \pm 2\Psi/M^2)^{1/2} - 1 . \quad (\text{B-9})$$

Se puede demostrar que las perturbaciones en la densidad y en la velocidad azimutal de los iones, en  $z = 0$ , son despreciables. Por el contrario, la perturbación en la velocidad radial de los iones, en algunos casos, puede afectar - apreciablemente la corriente iónica a la sonda. Esto ocurre cuando la sonda es muy corta ( $\hat{1} \ll 3M$ ) y  $\Psi_s/M^2$  está próximo a la unidad [ véase la condición (52) ].

# Apéndice C

## DESARROLLO MATEMATICO PARA EL PROBLEMA SIMILAR NO ESTACIONARIO

Para determinar  $\bar{j}^*/j_\infty$  cuantitativamente [Ecs. (53) y (54) de la Sec. V\*] es necesario, primeramente, calcular el tiempo de viaje a la sonda de un ión de la región A\*. Utilizando la fórmula (18), se puede integrar la ecuación del movimiento radial de un ión; se obtiene:

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left( \frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 = -\psi_s \bar{\delta} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \beta^* \left( 1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \sin^2 \varphi_0 \right) - \frac{\bar{\nu} \varepsilon^2}{4} (\rho_0^2 - \rho^2). \quad (C-1)$$

Para  $\varphi_0 \leq \pi/2$ , el tiempo de viaje a la sonda es

$$\tau_0 = \int_1^{\rho_0} d\rho \left[ (d\rho/d\tau)^2 \right]^{-1/2}, \quad (C-2)$$

y desarrollando  $(d\rho/d\tau)^2$  en (C-1) en torno a  $2\varepsilon^{-2} [-\psi_s \bar{\delta} \ln(\rho/\rho_0) + \beta^* \cos^2 \varphi_0]$  se obtiene:

$$\tau_0 \approx \pi^{1/2} \frac{\rho_0}{\rho_m} \exp\left(\frac{\alpha_c^*}{2}\right) \frac{\text{erf}(\ln \rho_0 + \alpha_c^*/2)^{1/2} - \text{erf}(\alpha_c^*/2)^{1/2}}{\left[ 1 - \alpha^* \sin^2 \varphi_0 - g_1(\alpha_c^*) \rho_0^2 / \rho_m^2 \right]^{1/2}} \quad (C-3)$$

con un error del orden del 1%<sup>\*\*</sup>; se ha definido  $\alpha_c^* = \alpha^* \cos^2 \varphi_0$  y  $g_1(y) = 3^{1/2} e^y \left[ \left\{ \text{erfc}(3y/2)^{1/2} / \text{erfc}(y/2)^{1/2} \right\} - 1 \right]$ . Para --

<sup>\*\*</sup> Para hacer estimaciones numéricas de los errores debidos a simplificaciones asintóticas ( $\psi_s \gg 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\alpha^* \ll 1$ ) se ha supuesto  $\psi_s \geq 10$ ,  $\varepsilon \leq 0.1$ ,  $\alpha^* \leq 0.1$ .

\* Para  $\tau = \hat{1}/M$ .



$\varphi_0 \geq \pi/2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \tau_0 \approx \tau_0(\pi - \varphi_0) + \frac{(8\alpha_c^*)^{1/2} \rho_0/\rho_m}{1 - \alpha_c^* - \bar{\nu} \rho_0^2/\rho_m^2} \cdot \\ \times \left[ 1 - \frac{2\alpha_c^*(1 - 2\bar{\nu} \rho_0^2/\rho_m^2)}{3(1 - \alpha_c^* - \bar{\nu} \rho_0^2/\rho_m^2)} \right]; \end{aligned} \quad (C-4)$$

el segundo término proviene del intervalo  $\rho > \rho_0$ , donde  $(d\rho/d\tau)^2$  puede ser aproximado por un polinomio de segundo grado en  $\rho$ .

El siguiente paso es invertir (C-3) y (C-4) para obtener  $\rho_{\max}(\varphi_0, \tau)$ , que es el máximo valor de  $\rho_0$  (para un valor dado de  $\varphi_0$ ) "recogido" por la sonda antes del instante  $\tau$ . De la Ec. (C-3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_0^2 \left[ \operatorname{erf}(\ln \rho_0 + \alpha_c^*/2)^{1/2} - \operatorname{erf}(\alpha_c^*/2)^{1/2} \right] \\ \approx \rho_m^2 \tau_0^2 (1 - \alpha_c^*) (\pi + \bar{g}_2 \bar{\nu} \tau^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (C-5)$$

Para llegar a (C-5) se hicieron las aproximaciones

$$\exp(-\alpha_c^*) (1 - \alpha_c^* \sin^2 \varphi_0) \approx 1 - \alpha_c^* \quad (C-6)$$

y

$$g_2(\alpha_c^*) \equiv g_1(\alpha_c^*) \exp(-\alpha_c^*) \operatorname{erfc}(\alpha_c^*/2) \approx \bar{g}_2 \equiv 0.75; \quad (C-7)$$

obsérvese que  $g_2(y)$  varía entre 0.732 y 0.782 para  $0 \leq y \leq 0.1$ .

También se hizo la aproximación

$$\begin{aligned} 1 + \pi^{-1} \bar{\nu} \bar{g}_2 \tau^2 \left[ 1 - \operatorname{erfc}(\ln \rho_0 + \alpha_c^*/2)^{1/2} / \operatorname{erfc}(\alpha_c^*/2)^{1/2} \right]^{-2} \\ \approx 1 + \pi^{-1} \bar{\nu} \bar{g}_2 \tau^2 \end{aligned} \quad (C-8)$$

que se justifica por el hecho de que  $\rho_m^2$  es muy grande. De la

Ec.(C-4) se obtiene una fórmula igual a (C-5), excepto que - ahora las dos funciones error se suman. Si se desarrolla la función  $\text{erfc}(\alpha_c^*/2)^{1/2}$  para  $\alpha_c^*$  pequeño con una aproximación del 1% se obtiene

$$\text{erf}(\ln \rho_0 + \alpha_c^*/2)^{1/2} + \text{erf}(\alpha_c^*/2)^{1/2} \approx \left[ 1 - (2\alpha^*/\pi)^{1/2} \cos \varphi_0 \right] \times \left[ 1 - \text{erfc}(\ln \rho_0 + \alpha_c^*/2)^{1/2} / \left\{ 1 - (2\alpha^*/\pi)^{1/2} \cos \varphi_0 \right\} \right] \quad (\text{C-9})$$

El segundo factor se puede escribir en la forma aproximada

$$1 - \text{erfc}(\ln \left\{ \rho_0 \left[ 1 - (2\alpha^*/\pi)^{1/2} \cos \varphi_0 \right] (1 - \alpha^*)^{1/2} \right\})^{1/2} \quad (\text{C-10})$$

Finalmente se obtiene:

$$\rho_{\max}^2 \approx \sigma^2 (1 - \alpha^*) \left[ 1 - (2\alpha^*/\pi)^{1/2} \cos \varphi_0 \right]^{-2} \quad (\text{C-11})$$

donde  $\sigma$  está dado por

$$\sigma \text{erf}(\ln \sigma)^{1/2} = \rho_m \tau (\pi + \bar{y} \bar{g}_2 \tau^2)^{-1/2} \quad (\text{C-12})$$

En (C-11) y (C-12) se ha escrito  $\rho_{\max}$  en vez de  $\rho_0$ , y  $\tau$  en vez de  $\tau_0$ ; estas ecuaciones proporcionan el máximo valor de  $\rho_0$  "recogido" antes del momento  $\tau$ , para un  $\varphi_0$  dado. El error de las aproximaciones anteriores es del orden - del 1% [39].

El último paso para la obtención de  $\bar{j}^*/j_\omega$  es integrar sobre  $\rho_0$  entre la unidad y el menor de los valores  $\rho_{\max}(\varphi_0, \tau)$ ,  $\bar{\rho}_A(\varphi_0)$ , y luego integrar sobre  $\varphi_0$ . La figura 12 presenta un diagrama que facilita la comprensión del cálculo; se incluyen varias curvas de la familia  $\rho_{\max}[\varphi_0, \sigma(\tau)] = \text{constante}$ . Nótese que hay un valor  $\sigma_L$  tal que si  $\sigma < \sigma_L$  las

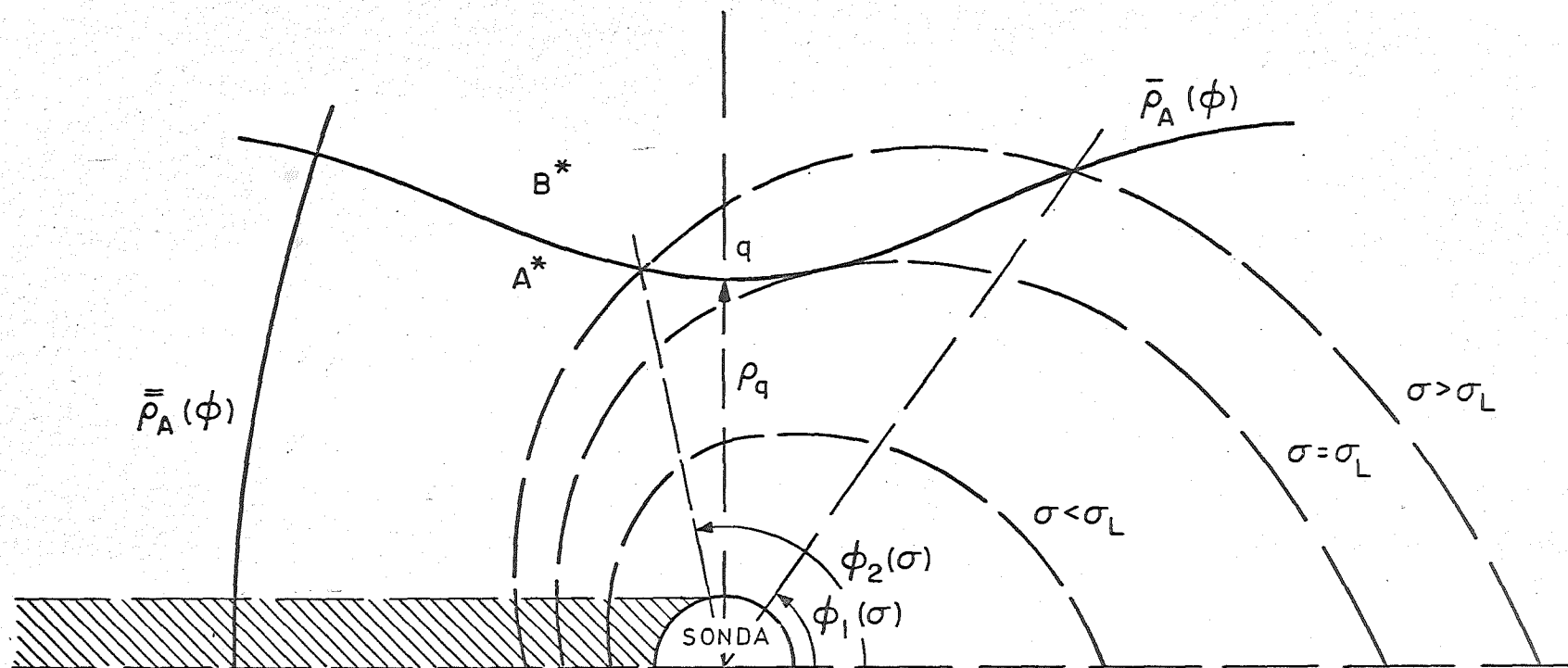


Fig.12 Diagrama auxiliar para la determinación de  $\hat{a}^*(\tau)$ .

curvas  $\rho_{\max}$  y  $\bar{\rho}_A$  no se cortan mientras que si  $\sigma > \sigma_L$  existen dos puntos de intersección, con ángulos  $\varphi_1(\sigma)$  y  $\varphi_2(\sigma)$ ; para  $\sigma = \sigma_L$ , se tiene  $\varphi_1 = \varphi_2$ . La ecuación  $\alpha^{\pm} = h(\sigma_L)$ , donde

$$h(\sigma) = \left[ \frac{\ln \sigma^2}{\sigma^2} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\ln \sigma^2 - 1}{\sigma^2} \right)^{1/2} - \frac{\bar{v}}{\rho_m^2} \right] \left( 1 - \frac{\ln \sigma^2}{\sigma^2} \right)^{-1} \quad (C-13)$$

proporciona el valor  $\sigma_L$ . Para  $\sigma < \sigma_L$  se tiene

$$\hat{a}^{\pm} = 2 \int_0^{\pi} d\varphi_0 \int_0^{\rho_{\max}(\varphi_0, \sigma)} \rho d\rho \approx \pi \sigma^2; \quad (C-14)$$

para  $\sigma > \sigma_L$  se tiene

$$\begin{aligned} \hat{a}^{\pm} = & \int_0^{\varphi_1(\sigma)} \rho_{\max}^2(\varphi_0, \sigma) d\varphi_0 + \int_{\varphi_1(\sigma)}^{\varphi_2(\sigma)} \bar{\rho}_A^2(\varphi_0) d\varphi_0 + \\ & + \int_{\varphi_2(\sigma)}^{\pi} \rho_{\max}^2(\varphi_0, \sigma) d\varphi_0. \end{aligned} \quad (C-15)$$

Sólo la integral segunda presenta alguna dificultad; para calcularla se hace la aproximación

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_A^2(\varphi_0) \approx & (\alpha^{\pm} \sin^2 \varphi_0 + \bar{v}/\rho_m^2)^{-1} \ln \left[ 1.32 \rho_q^2 e^{\alpha^{\pm}} (\alpha^{\pm} + \right. \\ & \left. + \bar{v}/\rho_m^2) (\alpha^{\pm} \sin^2 \varphi_0 + \bar{v}/\rho_m^2)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (C-16)$$

Finalmente de las Ecs. (C-14) y (C-15) y la igualdad

$$\bar{j}^{\pm}/j_{\infty} = \varepsilon \hat{a}^{\pm}/\varepsilon (8 \psi_s)^{1/2} \quad (C-17)$$

se obtienen las Ecs. (53) y (54) con un error que debiera ser menor que el 4%. En la fig. 13 se comparan ciertos cálculos numéricos de  $\bar{j}/j_{\infty}$  [37] con la fórmula obtenida de (53) y (54) por integración sobre una  $f_0$  Maxwelliana. El acuerdo es bueno.

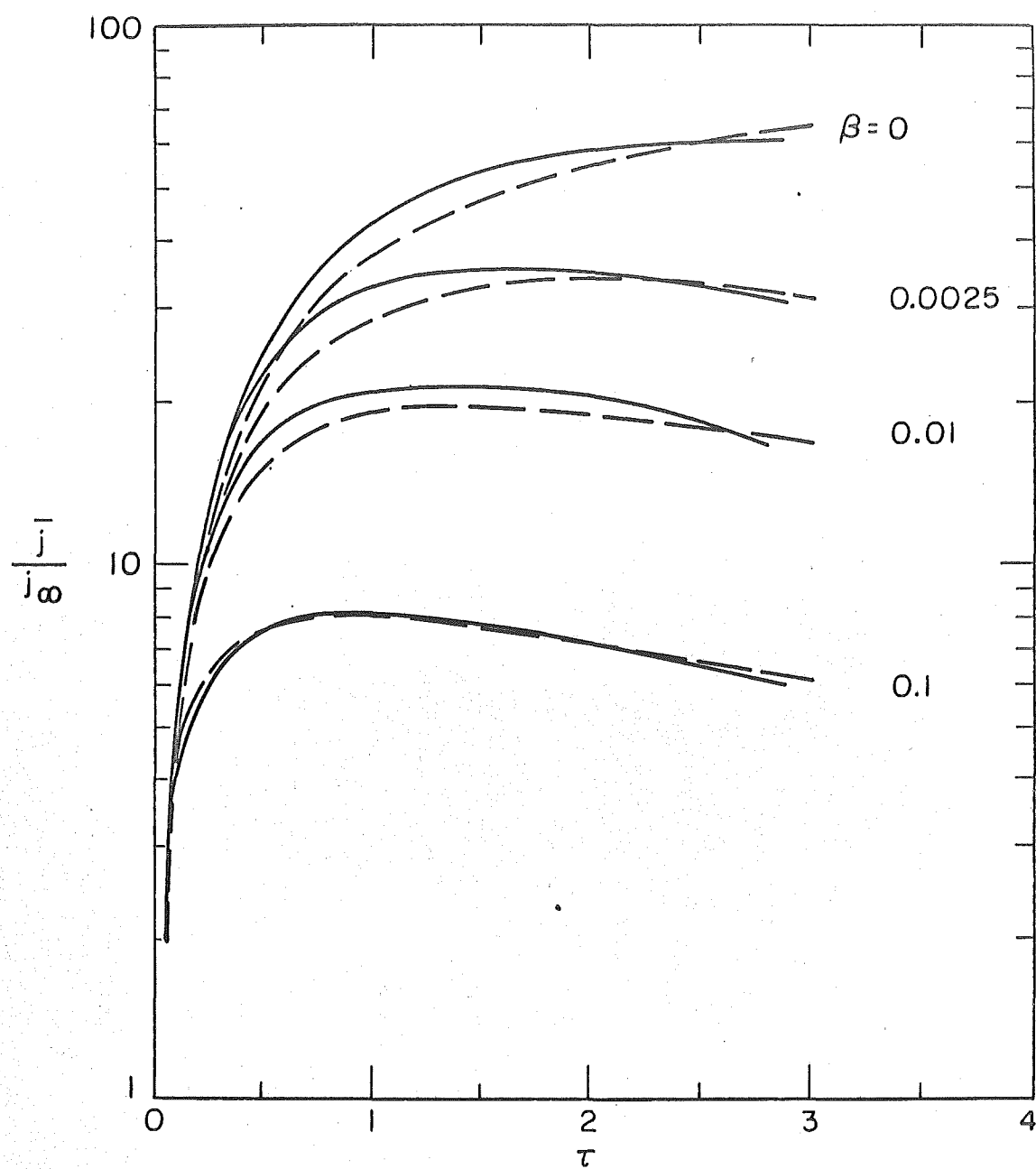


Fig.13 Dependencia temporal de la densidad de corriente adimensional  $\bar{j}/j_\infty$ , según los cálculos numéricos de la Ref. [37] (líneas a trazos) y según el análisis del Apéndice C (líneas continuas), para  $\epsilon = 10^{-2}$ ,  $\psi_s = 15$  y  $\beta$  variable.

## Apéndice D

### EL ANALISIS DE BETTINGER Y CHEN PARA $l > l_m$

Dado que la teoría desarrollada en esta tesis está limitada al régimen  $\hat{l} \lesssim 3M$ , parece apropiado comentar brevemente sobre el análisis de Bettinger y Chen [36] para el régimen  $\hat{l} > 3M$ .

Usando la terminología de esta tesis, y a la luz de la fig. 6, dicho análisis puede resumirse de la manera siguiente:

(A) Se divide la región  $A^*$  en dos subregiones, llamémoslas  $A_d$  y  $A_f$ , que se encuentran dentro y fuera de la capa de Debye respectivamente. Para el radio de dicha capa -- equivalente a  $\rho_m$  ó  $\exp(-\bar{\delta}^{-1})$ , se usa una expresión "a" obtenida de resultados numéricos para sondas en plasmas en reposo. Como se indicó en la Ref. [37], "a" presenta una dependencia de  $\Psi_s$  equivocada; esto produce errores en la dependencia de  $\bar{j}/j_\infty$  y  $\theta_{1/2}$  de  $\Psi_s$ , (Sec. VI).

(B) Se supone que la sonda captura todos los iones que inicialmente estaban en  $A_d$ ; esto conduce a la condición  $\hat{l} > \tau_m M \approx 3M$ . En cuanto a  $A_f$ , se observa correctamente que el tiempo equivalente que ha de usarse en el problema no estacionario no es  $\tau_1 \equiv \hat{l}/M$  sino  $\tau_1 - \tau_m$ . No obstante, en vez de incorporar esta corrección a sus fórmulas, Bettinger y Chen ajustan adecuadamente los datos experimentales en todas las comparaciones de teoría y experimento que discuten. Desgraciadamente, este procedimiento puede conducir a confusión; así

por ejemplo en el resumen de la teoría de Bettinger y Chen - que se incluye en la Ref. [37], no se consideran ni la corrección de las fórmulas ni el ajuste de los datos experimentales, lo que conduce a un desacuerdo exagerado entre teoría y experimento en las figuras 5a, b y c de dicha referencia.

(C) Para calcular  $\tau_m$ , se supone que  $\partial\psi/\partial\rho$  es de la forma  $\rho^{-n}$ , aún cuando la expresión correcta viene dada - por la Ec. (18). Sin embargo, se encuentra que la variación de  $\tau_m$  con el valor de  $n$  usado, no es muy grande.

(D) La hipótesis más crucial del análisis es la -- aproximación

$$\hat{a}_f^*(\tau) \sim \tau_1 - \tau_m \quad (D-1)$$

donde  $\hat{a}_f^*$  es la parte de  $\hat{a}^*$  perteneciente a  $A_f$ , y la constante de proporcionalidad se obtiene del límite  $\tau_1 \rightarrow \infty$ . Esto es claramente incorrecto porque el valor de  $\psi$  en el borde de la capa de Debye es de  $O(1)$ , por lo que en una extensa región más allá de dicha capa no se pueden aproximar las velocidades de los iones por sus valores asintóticos a menos que  $\beta \gg 1$  - (véase el comentario sobre el criterio de Bohm en la Sec. I). Es evidente que para  $\beta \ll 1$ , el error de la Ec. (D-1) puede ser apreciable excepto si  $\tau_1$  es muy grande.

(E) Un último error es el aproximar  $\bar{p}_A(\varphi)$  por su valor asintótico. Esta aproximación es claramente inaceptable para la región  $A_d$ . El error resultante debiera ser apreciable para valores moderados de  $\tau_1$ .

A pesar de las objeciones que preceden, la comparación entre teoría y experimento para potenciales moderados -

en la Ref.[36] es satisfactoria. Parece razonable utilizar -  
esa teoría para  $\hat{l} > 3M$ , con tal que se use un radio de la ca-  
pa de Debye apropiado ( $\rho_m$ ) y que se incorpore la corrección  
 $z_1 \rightarrow z_1 - z_m$  en las fórmulas.

---=00000=---